LRA - 12/76

UN METODO PER DETERMINARE I PARAMETRI CARATTERISTICI DI UNA DISTRIBUZIONE DI BRILLANZA

Fanti, C., Ficarra, A., Padrielli, L.

INTRODUZIONE

In questo rapporto viene descritto un metodo generale che permette di ricostruire la distribuzione di brillanza radio di una certa area di cielo, qualora sia nota (per punti) la risposta del radiotelescopio che osserva quell'area. Si assume un modello di distribuzione gaussiano bidimensionale e si fa l'ipotesi che anche il "beam" del radiotelescopio sia di tipo gaussiano (così è generalmente il beam che viene usato per la ricostruzione delle mappe radio, dopo il procedimento di "clean" dei dato ottenuti dal radiotelescopio di Westerbork). Innanzi tutto il metodo ricava dai dati sperimentali alcuni parametri che descrivono la distribuzione osservata e precisamente la posizione del baricentro, la direzione degli assi principali della distribuzione e i momenti quadrati della distribuzione intorno a tali assi. Successivamente, assumendo un modello gaussiano, il metodo giunge a impostare le relazioni fra i suddetti parametri e quelli relativi alla distribuzione originaria, facendo uso delle proprietà delle trasformate di Fourier. Infine viene brevemente discussa la risoluzione del sistema di equazione che permette di ricavare i parametri della distribuzione originaria e vengono evidenziati alcuni casi particolari. Nello sviluppo del procedimento matematico si tiene esplicitamente conto del fatto che l'esecuzione dei calcoli sarà affidata ad elaboratori elettronici, cioé si ha cura di discutere in particolare i possibili casi di singolarità ed il metodo per riconoscerli, e in ogni caso si impostano le operazioni in modo da minimizzare l'errore introdotto nei calcoli.

1. DEFINIZIONE DEL SISTEMA

Supponiamo che la zona di cielo osservata non sia eccessivamente estesa, cioé che la porzione di superficie sferica in esame sia approssimabile con un piano. In questa ipotesi possiamo definire un sistema cartesiano ortogonale X, Y a cui riferiamo la posizione dei punti della zona di cielo osservata. L'origine del sistema di riferimento è arbitraria. Per quanto riguarda la direzione degli assi invece, è più comodo che questi vengano scelti paralleli agli assi principali del "beam" d'antenna (che, come detto nell'introduzione, si suppone gaussiano). In altre parole, si sceglie il sistema di riferimento in modo che l'equazione del "beam" d'antenna sia a parte una costante

$$e^{-\left(\frac{x^2}{2\sigma_x^2}+\frac{y^2}{2\sigma_y^2}\right)}$$

Ogni punto in questo sistema di riferimento sarà quindi individuato dalla coppia di coordinate X_i e Y_i. Definiamo inoltre f_i il valore corrispondente della distribuzione di brillanza osservata in quel punto.

2.POSIZIONE DELL'OGGETTO IN ESAME

Per "posizione" di una zona estesa di radioemissione, si intende comunemente la posizione del suo baricentro radio, le cui coordinate, X_G e Y_G, sono date dall'espressione:

$$X_G = \frac{\sum x_i f_i}{\sum f_i} \quad ; \quad Y_G = \frac{\sum y_i f_i}{\sum f_i}$$

Determinate le coordinate X_G, Y_G trasferiamo per comodità, l'origine degli assi nel baricentro. In questo nuovo sistema, che indichiamo con ξ, η, le coordinate dei punti saranno:

$$\begin{cases} \xi_i = x_i - X_G \\ \eta_i = y_i - Y_G \end{cases}$$

3.DIREZIONE DEGLI ASSI PRINCIPALI DELLA DISTRIBUZIONE OSSERVATA

Gli assi principali definiscono due direzioni, l'una perpendicolare all'altra, lungo le quali si estende mediamente la distribuzione di brillanza osservata, come è noto gli assi devono passare per il baricentro e quindi le equazioni, nel sistema baricentrico, devono essere rispettivamente: $\eta = m\xi$ per un asse e $\eta = -\frac{1}{m}\xi$ per l'altro. Il nostro problema è di determinare il coefficiente angolare m, essendo note le coordinate ξ_i e η_i dei punti e i corrispondenti "pesi" f_i. La soluzione si può ottenere usando il metodo dei minimi quadrati, cioé imponendo che la somma dei quadrati delle <u>distanze</u> (pesate) dei punti dal generico asse con coefficiente m, sia minima rispetto a m. Come si può vedere geometricamente, la distanza di un punto ξ_i, η_i dalla retta $\eta = m\xi$ è data dalla relazione*:

$$\frac{|m\xi_i - \eta_i|}{\sqrt{1+m^2}}\,.$$

Elevando al quadrato ciascuna distanza, moltiplicando per il peso f_i, sommando e imponendo la condizione di minimo, si ha:

$$\frac{d}{dm}\left\{\sum_i\left[\frac{(m\xi_i-\eta_i)^2}{1+m^2}f_i\right]\right\}=0$$

Sviluppando questa espressione, si perviene alla seguente equazione di 2° grado:

$$m^2 + \frac{\sum(\xi_i^2-\eta_i^2)f_i}{\sum \xi_i\eta_i f_i}\,m - 1 = 0$$

Come si può vedere immediatamente il prodotto delle due soluzioni (sempre reali) è: -1. Questo significa che le soluzioni rappresentano <u>entrambi</u> gli assi ortogonali che si cercavano. Si ha una singolarità quando $\sum \xi_i\eta_i f_i = 0$. In questo caso gli assi sono paralleli a quelli di riferimento (soluzioni: $m_1 = 0$ e $m_2 = \infty$), oppure (se anche il termine $\sum(\xi_i^2 - \eta_i^2) f_i$ è nullo) la distribuzione è a simmetria circolare (m indeterminato); si può, per co-

* Perchè questo sia vero è indispensabile che le due coordinate siano omogenee.

modità, far coincidere questo ultimo caso con il precedente, cioè porre ancora $m = 0$ se la distribuzione è a simmetria circolare, risulterà tale quando si calcoleranno le dimensioni dei due assi. Per evitare che l'elaboratore lavori intorno ad un punto di singolarità si può procedere come segue:
Avendo posto $\sum (\xi_i^2 - \eta_i^2) f_i = a$ e $\sum \xi_i \eta_i f_i = b$, si esamina b : nel caso (molto eccezionale) che b sia esattamente nullo, si pone: $m = 0$ e non si risolve l'equazione. Diversamente, si confronta b con a :

Se $|a| \leq 1000\,|b|$ e $|b| \leq 1000\,|a|$ si risolve l'equazione;

Se $|a| > 1000\,|b|$ si pone $m = 0$

Se $|b| > 1000\,|a|$ si pone $m = 1$.

In questi ultimi due casi l'errore introdotto corrisponde a meno di 0°05 nell'angolo.

4. MOMENTI QUADRATI DELLA DISTRIBUZIONE INTORNO AGLI ASSI PRINCIPALI.

Determinate le direzioni degli assi, indicheremo d'ora in poi con il simbolo m quella soluzione per cui risulta $|m| < 1$; questo, per evitare in ogni caso la singolarità: $m = \infty$. Corrispondentemente, gli angoli α e β che gli assi così determinati formano con l'asse x del sistema di riferimento, saranno

$$\begin{cases} \alpha = \operatorname{arctg}(m) \\ \beta = \alpha + \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad \text{con} \quad |\alpha| < \frac{\pi}{4}$$

Consideriamo ora il nuovo sistema di riferimento ξ', η', ottenuto ruotando il precedente di un angolo α (in senso antiorario, per α positivo).

Le formule di trasformazione sono*:

$$(1) \qquad \begin{cases} \xi' = \xi \cos\alpha + \eta \operatorname{sen}\alpha \\ \eta' = -\xi \operatorname{sen}\alpha + \eta \cos\alpha \end{cases}$$

* Vale la stessa nota a pag. 3

In questo sistema, i momenti quadrati σ_α^2 e σ_β^2 della distribuzione intorno agli assi sono dati dalle espressioni:

$$\begin{cases} \sigma_\alpha^2 = \dfrac{\sum \xi_i'^2 f_i}{\sum f_i} \\[2ex] \sigma_\beta^2 = \dfrac{\sum \eta_i'^2 f_i}{\sum f_i} \end{cases}$$

Sostituendo la (1) al posto di ξ^1 e η^1 e ricordando che :

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{1+tg^2\alpha} = \frac{1}{1+m^2} \quad ; \quad sen^2\alpha = \frac{m^2}{1+m^2} \quad ; \quad 2\,sen\alpha\cos\alpha = \frac{2m}{1+m^2}$$

si ha infine:

$$\begin{cases} \sigma_\alpha^2 = \dfrac{\sum \xi_i^2 f_i + m^2 \sum \eta_i^2 f_i + 2m \sum \xi_i \eta_i f_i}{(1+m^2)\sum f_i} \\[3ex] \sigma_\beta^2 = \dfrac{m^2 \sum \xi_i^2 f_i + \sum \eta_i^2 f_i - 2m \sum \xi_i \eta_i f_i}{(1+m^2)\sum f_i} \end{cases}$$

Dall'esame di queste ultime due relazioni risulta in particolare che se $\sigma_\alpha =$ $= \sigma_\beta$ (distribuzione a simmetria circolare), si ha

$$\sigma_\alpha = \frac{\sum \xi_i^2 f_i}{\sum f_i} = \frac{\sum \eta_i^2 f_i}{\sum f_i} = \sigma_\beta$$

qualunque sia il valore di m scelto.

5.MODELLO DI DISTRIBUZIONE GAUSSIANO E TRASFORMATA DI FOURIER BIDIMENSIONALE.

Come è già stato detto, si assume un modello di distribuzione gaussiano bidimensionale sia per il "beam" d'antenna, che per quanto riguarda la distribuzione originaria di brillanza. Conseguentemente anche la distribuzione osservata è di tipo gaussiano, come dimostreremo più avanti. Sotto queste ipotesi, determinate con i metodi descritti nei paragrafi precedenti, i parametri caratteristici della distribuzione di brillanza osservata (α, β, σ_α, e σ_β), la funzione che descrive la distribuzione osservata, nel sistema ξ^1, η^1 sarà

$$O(\xi,\eta) = e^{-\left[\left(\frac{\cos^2\alpha}{2\sigma_\alpha^2}+\frac{\mathrm{sen}^2\alpha}{2\sigma_\beta^2}\right)\xi^2+\left(\frac{\mathrm{sen}^2\alpha}{2\sigma_\alpha^2}+\frac{\cos^2\alpha}{2\sigma_\beta^2}\right)\eta^2+\mathrm{sen}\,2\alpha\left(\frac{1}{2\sigma_\alpha^2}-\frac{1}{2\sigma_\beta^2}\right)\xi\eta\right]}$$

e per il beam : $B(\xi,\eta) = e^{-\left[\frac{\xi^2}{2\sigma_x^2}+\frac{\eta^2}{2\sigma_y^2}\right]}$

Infine, la distribuzione originaria, orientata nelle direzioni θ e $\varphi = \vartheta + \frac{\pi}{2}$, e con momenti quadrati incogniti σ_θ^2 e σ_φ^2 sarà del tipo:

$$S(\xi,\eta) = e^{-\left[\left(\frac{\cos^2\theta}{2\sigma_\theta^2}+\frac{\mathrm{sen}^2\theta}{2\sigma_\varphi^2}\right)\xi^2+\left(\frac{\sin^2\theta}{2\sigma_\theta^2}+\frac{\cos^2\theta}{2\sigma_\varphi^2}\right)\eta^2+\mathrm{sen}\,2\theta\left(\frac{1}{2\sigma_\theta^2}-\frac{1}{2\sigma_\varphi^2}\right)\xi\eta\right]}$$

Com'è noto, la distribuzione osservata è la covoluzione fra il "beam" e la distribuzioe originale. Per una fondamentale proprietà delle trasformate di Fourier (F.T.), ne consegue che la F.T. della O (ξ,η) è uguale al prodotto della F.T. della B (ξ,η) per la F.T. della $S(\xi,\eta)$. E' quindi possibile, noti O (ξ,η) e $B(\xi,\eta)$, determinare $S(\xi,\eta)$.
Ricordiamo la definizione della F.T. bidimensionale: data una funzione f(x, y), la sua F.T. è quella funzione di u e v che risulta dall'espressione:

$$T[f] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\, e^{-2\pi i[ux+vy]}\, dx\, dy$$

Determiniamo ora le F.T. delle nostre funzioni, ricordando che si tratta di calcolare integrali del tipo :

$$T(u,v) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-[a\xi^2+b\eta^2+c\xi\eta]}\, e^{-2\pi i[u\xi+v\eta]}\, d\xi\, d\eta$$

per cui risulta (eseguito il calcolo):

$$T(u,v) = e^{-\frac{4\pi^2}{4ab-c^2}[bu^2+av^2-cuv]}$$

Applicando questo risultato alla F.T. della distribuzione originaria si ha, dopo alcuni semplici passaggi:

$$T[S] = e^{-2\pi^2\left[\left(\sigma_\sigma^2 \cos^2\vartheta + \sigma_\rho^2 \operatorname{sen}^2\vartheta\right)u^2 + \left(\sigma_\rho^2 \cos^2\vartheta + \sigma_\vartheta^2 \operatorname{sen}^2\vartheta\right)v^2 - 2\operatorname{sen}2\vartheta\left(\sigma_\rho^2 - \sigma_\vartheta^2\right)uv\right.}$$

Analogamente, per quanto riguarda il "beam"

$$T[B] = e^{-2\pi^2\left[\sigma_x^2 u^2 + \sigma_y^2 v^2\right]}$$

Quindi la F.T. della distribuzione osservata è: $T[O] = T[S]\cdot T[B] =$

$$= e^{-2\pi^2\left[\left(\sigma_\vartheta^2\cos^2\vartheta + \sigma_\rho^2 \operatorname{sen}^2\vartheta + \sigma_x^2\right)u^2 + \left(\sigma_\rho^2\cos^2\vartheta + \sigma_\vartheta^2 \operatorname{sen}^2\vartheta + \sigma_y^2\right)v^2 - \operatorname{sen}2\vartheta\left(\sigma_\rho^2 - \sigma_\vartheta^2\right)uv\right]}$$

Esaminando quest'ultima espressione si deduce che anche la distribuzione osservata deve essere di tipo gaussiano, come era già stato anticipato. D'altra parte, la F.T. della distribuzione osservata, calcolata direttamente è:

$$T[O] = e^{-2\pi^2\left[\left(\sigma_\alpha^2\cos^2\alpha + \sigma_\beta^2 \operatorname{sen}^2\alpha\right)u^2 + \left(\sigma_\beta^2\cos^2\alpha + \sigma_\alpha^2 \operatorname{sen}^2\alpha\right)v^2 - \operatorname{sen}2\alpha\left(\sigma_\beta^2 - \sigma_\alpha^2\right)uv\right]}$$

Le due espressioni sono quindi identiche poichè tale identità deve valere per ogni U e per ogni V, si deduce il seguente sistema di tre equazioni nelle tre incognite ϑ, σ_σ e σ_α:

$$(2)\qquad \begin{cases} \sigma_\vartheta^2\cos^2\vartheta + \sigma_\rho^2 \operatorname{sen}^2\theta = \sigma_\alpha^2\cos^2\alpha + \sigma_\beta^2 \operatorname{sen}^2\alpha - \sigma_x^2 \\ \sigma_\vartheta^2 \operatorname{sen}^2\theta + \sigma_\rho^2\cos^2\theta = \sigma_\alpha^2 \operatorname{sen}^2\alpha + \sigma_\beta^2\cos^2\alpha - \sigma_y^2 \\ \left(\sigma_\rho^2 - \sigma_\sigma^2\right)\operatorname{sen}2\vartheta = \left(\sigma_\beta^2 - \sigma_\alpha^2\right)\operatorname{sen}2\alpha \end{cases}$$

6. RISOLUZIONE DEL SISTEMA

Sommando e sottraendo la prima e la seconda equazione nel sistema (2) si ottiene il sistema equivalente:

$$
(3) \quad \begin{cases}
\sigma_\vartheta^2 + \sigma_\varphi^2 = (\sigma_\alpha^2 + \sigma_\beta^2) - (\sigma_x^2 + \sigma_y^2) \\
(\sigma_\vartheta^2 - \sigma_\varphi^2)\cos 2\vartheta = (\sigma_\alpha^2 - \sigma_\beta^2)\cos 2\alpha - (\sigma_x^2 - \sigma_y^2) \\
(\sigma_\vartheta^2 - \sigma_\varphi^2)\,\mathrm{sen}\, 2\vartheta = (\sigma_\alpha^2 - \sigma_\beta^2)\,\mathrm{sen}\, 2\alpha
\end{cases}
$$

A questo punto, quadrando e sommando le ultime due equazioni, si ha:

$$
\sigma_\vartheta^2 - \sigma_\varphi^2 = \pm \sqrt{(\sigma_\alpha^2 - \sigma_\beta^2)^2 + (\sigma_x^2 - \sigma_y^2)^2 - 2\cos 2\alpha\,(\sigma_\alpha^2 - \sigma_\beta^2)(\sigma_x^2 - \sigma_y^2)}
$$

Resta da risolvere l'indeterminazione del segno: a questo proposito c'è da notare che, scegliere un segno piuttosto dell'altro, significa invertire σ_y con σ_x , e di conseguenza, come risulta chiaro all'esame delle ultime due equazioni del sistema aggiungere π all'angolo 2ϑ, cioé $\pi/2$ all'angolo ϑ . Si può quindi dedurre che la scelta nel segno non altera in alcun modo il risultato finale (semmai provoca uno scambio di nomi; in ogni caso, all'angolo, definito con il nome ϑ , corrisponde sempre il momento σ_ϑ e viceversa). Scegliamo allora per comodità il segno più: ciò significa che noi vogliamo indicare con σ_ϑ il momento maggiore fra i due e, di conseguenza, con ϑ la direzione principale lungo cui si estende l'oggetto.

Otteniamo quindi, insieme alla prima equazione del sistema (3), il nuovo sistema di 2 equazioni. Nelle due incognite σ_ϑ e σ_φ (notare che $\cos 2\alpha$ è espresso in funzione di m):

$$
\begin{cases}
\sigma_\vartheta^2 + \sigma_\varphi^2 = (\sigma_\alpha^2 + \sigma_\beta^2) - (\sigma_x^2 + \sigma_y^2) \\
\sigma_\vartheta^2 - \sigma_\varphi^2 = \sqrt{(\sigma_\alpha^2 - \sigma_\beta^2)^2 + (\sigma_x^2 - \sigma_y^2)^2 - 2\,\dfrac{1-m^2}{1+m^2}(\sigma_\alpha^2 - \sigma_\beta^2)(\sigma_x^2 - \sigma_y^2)}
\end{cases}
$$

da cui infine si hanno le soluzioni:

$$
(4)\quad \begin{cases} \sigma_\vartheta^2 = \frac{1}{2}\left[(\sigma_\alpha^2 + \sigma_\beta^2) - (\sigma_x^2 + \sigma_y^2) + \sqrt{(\sigma_\alpha^2 - \sigma_\beta^2)^2 + (\sigma_x^2 - \sigma_y^2)^2 - 2\frac{1-m^2}{1+m^2}(\sigma_\alpha^2 - \sigma_\beta^2)(\sigma_x^2 - \sigma_y^2)}\right. \\ \\ \sigma_\varrho^2 = \frac{1}{2}\left[(\sigma_\alpha^2 + \sigma_\beta^2) - (\sigma_x^2 + \sigma_y^2) - \sqrt{(\sigma_\alpha^2 - \sigma_\beta^2)^2 + (\sigma_x^2 - \sigma_y^2)^2 - 2\frac{1-m^2}{1+m^2}(\sigma_\alpha^2 - \sigma_\beta^2)(\sigma_x^2 - \sigma_y^2)}\right. \end{cases}
$$

Può accadere che una delle due soluzioni (σ_ϱ^2), o entrambe, siano negative. Un risultato del genere non ha ovviamente alcun significato fisico, dovendosi riferire a dei momenti quadrati, ma è ugualmente da non escludere a pricri. Infatti, alcuni termini noti del sistema (σ_α, σ_β e α) sono ricavati dai dati sperimentali e, come tali possono essere affetti da errore, dovuto, per esempio, al rumore presente nelle registrazioni o al fatto che il modello gaussiano può essere in taluni casi inadeguato. Per evitare di prendere in considerazione soluzioni negative, o comunque soluzioni prive di significato, il procedimento migliore è probabilmente quello di confrontare le soluzioni trovate con i parametri del "beam". Per esempio si può porre r = $0.1\,\frac{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}{2}$ e confrontare r con le soluzioni:

Se: $|\sigma_\varrho^2| < \tau$, si pone $\sigma_\varrho^2 = 0$ si fa lo stesso confronto fra σ_ϑ^2 e r. Se: $|\sigma_\varrho^2| > \tau$, allora possono darsi due casi: 1) $\sigma_\varrho^2 < 0$, il modello è inadeguato e l'indagine può ritenersi conclusa con un insucesso; 2) $\sigma_\varrho^2 > 0$, le soluzioni trovate possone essere considerate significative.

A questo punto resta da calcolare la direzione ϑ . E' chiaro che ha senso determinare tale direzione solo se i due momenti σ_ϑ e σ_ϱ sono sensibilmente diversi fra loro e diversi da zero. Altrimenti la distribuzione è, rispettivamente, a simmetria circolare o puntiforme ed in entrambi i casi l'angolo ϑ non esiste. Il procedimento precedente ci permetterà già di discriminare il caso della sorgente puntiforme, per cui ne risulta $\sigma_\vartheta^2 = \sigma_\varrho^2 = 0$, non si procede al calcolo di ϑ (oppure si pone convenzionalmente $\vartheta = 0$). Altrimenti, bisogna controllare ancora che i due momenti siano sensibilmente diversi. Un criterio corretto potrebbe essere quello di controllare l'eccentricità, cioè il termine: $1 - \frac{\sigma_{\ell}}{\sigma_{\theta}}$. Se questo numero (sempre compreso fra 0 e 1) è molto vicino a zero, per esempio è minore di 0.1, allora si può assumere che la distribuzione sia a simmetria circolare. Diversamente si può procedere al calcolo di θ . Le due ultime equazioni del sistema (3) ci permettono di calcolare l'angolo 2 θ, essendo noti il seno e coseno. A questo proposito, se il programma scritto per l'elaboratore è in linguaggio FORTRAN, si può fare uso di una "subroutine" di libreria (ATAN 2) che permette il calcolo dell'arcotangente con due argomenti risolvendo anche le singolarità: dati nell'ordine il seno ed il coseno la subroutine fornisce l'angolo in un intervallo compreso fra $-\pi$ e $+\pi$. Per cui si può porre:

(5) $$\theta = \frac{1}{2} \, \mathrm{ATAN\,2} \left[\frac{2m}{1+m^2} \left(\sigma_\alpha^2 - \sigma_\beta^2 \right), \frac{1-m^2}{1+m^2} \left(\sigma_\alpha^2 - \sigma_\beta^2 \right) - \left(\sigma_x^2 - \sigma_y^2 \right) \right]$$

L'angolo θ è quindi univocamente determinato, risultando compreso fra $-\frac{\pi}{2}$ e $+\frac{\pi}{2}$. L'insieme delle (4) e della (5) rappresenta dunque la soluzione generale del sistema.

Nel prossimo paragrafo vedremo alcuni casi particolari, che, essendo riconoscibili a priori, permettono di trovare le soluzioni con calcoli più semplici e quindi più precisi.

7.CASI PARTICOLARI.

a) Assi della distribuzione osservata parallela agli assi del beam ($m = 0$).

Questo caso è molto importante perchè comprende anche quelli, tutt'altro che infrequenti, della sorgente puntiforme e della distribuzione a simmetria circolare, (infatti si è deciso per, comodità, di porre $m = 0$ anche nel caso in cui m è indeterminato come è detto nel paragrafo 3).

Sostituiamo m = 0 nelle (4) e nella (5). Il termine sotto radice diventa un quadrato perfetto. Per cui si ha:

$$\begin{cases} \sigma_\vartheta^2 = \frac{1}{2}\left[(\sigma_\alpha^2+\sigma_\beta^2)-(\sigma_x^2+\sigma_y^2)+\left|(\sigma_\alpha^2-\sigma_\beta^2)-(\sigma_x^2-\sigma_y^2)\right|\right] \\ \sigma_\rho^2 = \frac{1}{2}\left[(\sigma_\alpha^2+\sigma_\beta^2)-(\sigma_x^2-\sigma_y^2)-\left|(\sigma_\alpha^2-\sigma_\beta^2)-(\sigma_x^2-\sigma_y^2)\right|\right] \\ \vartheta = \frac{1}{2}\,ATAN2\left[0,\ (\sigma_\alpha^2-\sigma_\beta^2)-(\sigma_x^2-\sigma_y^2)\right] \end{cases}$$

Possono darsi due casi:

1) $(\sigma_\alpha^2-\sigma_\beta^2)-(\sigma_x^2-\sigma_y^2) > 0$, da cui: $(\sigma_\alpha^2-\sigma_x^2) > (\sigma_\beta^2-\sigma_y^2)$ cioé la sorgente si estende di più in direzione X che in direzione Y. In questo caso si ha:

$$\begin{cases} \sigma_\vartheta^2 = \sigma_\alpha^2-\sigma_x^2 \\ \sigma_\rho^2 = \sigma_\beta^2-\sigma_y^2 \\ \vartheta = 0 \end{cases}$$

2) $(\sigma_\alpha^2-\sigma_\beta^2)-(\sigma_x^2-\sigma_y^2) < 0$ (la sorgente si estende maggiormente in direzione Y)

Si ha:

$$\begin{cases} \sigma_\vartheta^2 = \sigma_\beta^2-\sigma_y^2 \\ \sigma_\rho^2 = \sigma_\alpha^2-\sigma_x^2 \\ \vartheta = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Come era ovvio prevedere, la distribuzione originaria è anch'essa orientata parallelamente al "beam" e i suoi momenti quadrati sono la differenza fra i momenti quadrati della distribuzione osservata e quelli del beam.

b) "Beam" circolare ($\sigma_x = \sigma_y$)

Si ha:

$$\begin{cases} \sigma_\theta^2 = \frac{1}{2}\left[(\sigma_\alpha^2 + \sigma_\beta^2) - 2\,\sigma_x^2 + |\sigma_\alpha^2 - \sigma_\beta^2|\right] \\ \sigma_\rho^2 = \frac{1}{2}\left[-(\sigma_\alpha^2 + \sigma_\beta^2) - 2\,\sigma_x^2 - |\sigma_\alpha^2 - \sigma_\beta^2|\right] \\ \theta = \frac{1}{2} \cdot \mathrm{ATAN2}\left[2m\,(\sigma_\alpha^2 - \sigma_\beta^2),\ (1-m^2)(\sigma_\alpha^2 - \sigma_\beta^2)\right] \end{cases}$$

Anche qui possono darsi due casi:

1) $\sigma_\alpha^2 > \sigma_\beta^2$

Si ha:

$$\begin{cases} \sigma_\theta^2 = \sigma_\alpha^2 - \sigma_x^2 \\ \sigma_\rho^2 = \sigma_\beta^2 - \sigma_x \\ \theta = \alpha \end{cases} \qquad \left(\frac{2m}{1-m^2} = \frac{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha} = \mathrm{tg}\,2\alpha\right)$$

2) $\sigma_\alpha^2 < \sigma_\beta^2$

In questo caso si ha:

$$\begin{cases} \sigma_\theta^2 = \sigma_\beta^2 - \sigma_x^2 \\ \sigma_\rho^2 = \sigma_\alpha^2 - \sigma_x^2 \\ \theta = \alpha + \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Questa volta la distribuzione originaria è orientata parallelamente alla distribuzione osservata e i suoi momenti quadrati sono la differenza fra quelli della distribuzione osservata e il "raggio" del beam.

8.FLUSSO TOTALE DELLA DISTRIBUZIONE ORIGINARIA

A questo punto determinati tutti i parametri "geometrici" della distribuzione, resta ancora da dire qualcosa a proposito del flusso totale. Questa quantità non è mai comparsa nelle formule usate finora, in quantò le costanti moltiplicative nelle funzioni di distribuzione non intervengono nel calcolo delle posizioni e dei diametri. Volendo scrivere l'espressione completa della distribuzione osservata si ha invece:

$$P \times O.(\xi\,,\,\eta)$$

Dove la costante P è il "picco" della distribuzione. Il flusso totale S è definito da:

$$S = \frac{\iint P \cdot O(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta}{\iint B(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta}$$

Eseguendo il calcolo dell'integrale, nell'ipotesi di un modello gaussiano, si ha:

$$S = \frac{P\, 2\pi\, \sigma_\alpha\, \sigma_\beta}{2\pi\, \sigma_x\, \sigma_y} = \frac{\sigma_\alpha\, \sigma_\beta}{\sigma_x\, \sigma_y}\, P$$

Per cui, misurando l'intensità del picco P si può ricevare il flusso. Da notare che, nel caso della sorgente puntiforme ($\sigma_\alpha = \sigma_\beta$ e $\sigma_\beta = \sigma_y$) il flusso totale così definito coincide con l'intensità di picco. C'é però un altro metodo per determinare il flusso che consiste nell'applicare direttamente la definizione. Cioé, detti b_i i punti del "beam", campionati come i dati f_i, il flusso è:

$$S = \frac{\sum_i f_i}{\sum_i b_i}$$

Questo secondo metodo è indubbiamente più preciso, sia perchè è valido sempre, anche nel caso che la distribuzione non sia gaussiana (purchè il "beam" non sia ad area nulla), sia perchè si basa sulla misura di molti punti e non solo su quella del picco.