

# **SYNAGE**

**Calcolo dell' eta' radiativa  
delle radiosorgenti**

**M.Murgia , R.Fanti**

**Istituto di Radioastronomia, CNR**

**Rapporto Interno IRA 228/96**

# Indice

<b>Introduzione</b> .....	<b>2</b>
<b>1</b>	<b>3</b>
1.1 Emissione da un insieme di elettroni relativistici .....	3
1.2 Energia di taglio .....	4
1.3 Distribuzione in energia delle particelle .....	4
1.4 Iniezione continua .....	5
1.5 Distribuzione in angolo di inclinazione .....	6
1.6 Spettro di emissione in approssimazione monocromatica .....	8
1.7 Spettro convoluto .....	10
1.8 Età di sincrotrone .....	15
1.9 Spettri a due frequenze .....	16
1.10 Spettri multifrequenza .....	18
<b>2</b>	<b>19</b>
2.1 Il programma SYNAGE .....	19
2.2 Devices .....	19
2.3 La tabella dei dati .....	20
2.4 I parametri del modello .....	24
2.5 La lettura della tabella dati .....	25
2.6 La determinazione della frequenza di break .....	27
2.7 La procedura di fit .....	30
2.8 Output grafico .....	34
2.9 La tabella di output .....	36
2.10 Intervalli di confidenza .....	37
<b>A</b>	<b>39</b>
A.1 Le devics video .....	39
A.2 Le regole di installazione .....	40
A.3 Le soluzioni numeriche .....	41

# Introduzione

La determinazione delle età caratteristiche per le radiosorgenti extragalattiche è uno dei punti cruciali per comprenderne la loro fisica ed evoluzione.

Il metodo comunemente usato è basato sullo studio dello spettro di sincrotrone e fornisce l'età degli elettroni più vecchi presenti nelle radiosorgenti.

La teoria della radiazione di sincrotrone è ben nota da tempo e permette, nell'ambito di certe semplificazioni, di interpretare agevolmente, per quanto riguarda gli andamenti asintotici, le caratteristiche spettrali principali delle radiosorgenti.

Ma non appena si cerca di affrontare la fisica delle radiosorgenti in modo più realistico, per esempio tenendo conto della distribuzione in angolo di inclinazione degli elettroni relativistici o dell'evoluzione del loro spettro di energia, la teoria si complica. La difficoltà principale che si incontra consiste tutta nel fatto che, cadute certe approssimazioni, molti aspetti della teoria non possono essere trattati analiticamente.

In particolare, l'evoluzione temporale dettagliata dello spettro di emissione ad alta frequenza, fondamentale per uno studio efficace dell'età di sincrotrone, è descritta da un integrale doppio non risolvibile in modo analitico.

L'autore ha risolto numericamente l'integrale per tre diversi modelli di interesse astrofisico, realizzando nel contempo SYNAGE. Si tratta di un programma scritto in FORTRAN sofisticato quanto basta per permettere un preciso e veloce adattamento degli spettri numerici ai dati osservativi.

Nel primo capitolo si riassumono alcuni concetti fondamentali che stanno alla base della teoria. Nel secondo vengono descritte le modalità del funzionamento di SYNAGE.

Questo rapporto nasce nell'ambito del lavoro svolto durante la tesi di laurea "età radiative di radiosorgenti extragalattiche" (M.Murgia, 1996).

# Capitolo 1

## 1.1 Emissione da un insieme di elettroni relativistici

La potenza emessa da un singolo elettrone relativistico in moto in un campo magnetico  $H$  dipende dalla sua energia  $\epsilon$  e dal suo angolo di inclinazione  $\theta$  secondo la formula

$$-\frac{d\epsilon}{dt} = C_\epsilon (H \sin\theta)^2 \epsilon^2 \quad (1.1)$$

La radiazione si propaga sotto forma di impulsi il cui spettro si estende, grosso modo, fino ad una frequenza critica

$$\nu_c = C_\nu (H \sin\theta) \epsilon^2 \quad (1.2)$$

In unità c.g.s. le due costanti valgono

$$C_\epsilon \simeq 2.37 \cdot 10^{-3}$$

$$C_\nu \simeq 6.27 \cdot 10^{18}$$

Esprimendo il campo magnetico in micro Gauss, e la frequenza in mega Hertz si ha

$$\nu_c \simeq 4.2 \cdot 10^{-6} H_{\mu G} \gamma^2 \sin\theta \quad [MHz]$$

Ciò vuol dire che è sufficiente variare  $\gamma$  da  $10^3$  a  $10^5$  per coprire tutta la banda radio.

Se non agiscono meccanismi di assorbimento ed ogni particella irradia in maniera indipendente dall'altra, si può pensare che lo spettro di emissione di un insieme di elettroni relativistici sia dato dalla composizione degli spettri delle singole particelle.

L'analisi dello spettro totale può fornire informazioni sulla distribuzione in energia delle particelle, sulla struttura del campo magnetico e, soprattutto, può consentire una stima delle età radiative delle radiosorgenti.

Lo spettro è infatti soggetto ad una evoluzione nel tempo, le perdite per radiazione alterano la distribuzione in energia delle particelle, ed in particolare delle particelle di più alta energia. Di riflesso, lo spettro di emissione subisce generalmente una modifica più o meno sostenuta a partire dalle alte frequenze. Si vedrà come, dal confronto fra lo spettro calcolato e quello osservato, è possibile una stima dell'età della radiosorgente.

## 1.2 Energia di taglio

Nei calcoli che seguono si considera, per il momento, un insieme di elettroni relativistici confinati in una regione in cui è presente un campo magnetico uniforme e non variabile nel tempo, la regione in esame non si espande, non vi è iniezione di nuove particelle né riaccelerazione delle vecchie. In pratica si suppone che l'energia delle particelle si modifichi solo a causa di perdite radiative.

Per rendere più chiaro il discorso, consideriamo una popolazione di particelle ad uno stesso angolo di inclinazione  $\theta$ , e, per ora supponiamo che tale angolo non possa variare. Il caso di più popolazioni ad angoli diversi, o il caso di un angolo variabile nel tempo, sono argomento del prossimo paragrafo.

Integrando la (1.1) rispetto al tempo si ricava che l'energia di una singola particella dipende dal tempo secondo la formula

$$\epsilon(t) = \frac{\epsilon_0}{1 + \frac{\epsilon_0}{\epsilon_b}}$$

con  $\epsilon_0$  si indica l'energia della particella per  $t=0$ , mentre  $\epsilon_b$  è detta energia di taglio

$$\epsilon_b = \frac{1}{C_e (H \sin \theta)^2 t} \quad (1.3)$$

Il significato dell'energia di taglio è fondamentale: qualunque sia l'energia iniziale  $\epsilon_0$  della particella, ad un fissato tempo  $t$  l'energia della particella  $\epsilon(t)$  sarà comunque minore di  $\epsilon_b$ . Per convincersi di ciò si consideri il rapporto

$$\frac{\epsilon(t)}{\epsilon_b} = \frac{\epsilon_0}{\epsilon_0 + \epsilon_b}$$

Questo è sempre minore di uno a qualunque  $t$ . Nel limite per  $\epsilon_0$  tendente ad infinito,  $\epsilon(t)$  tende ad  $\epsilon_b$ .

Il fatto notevole è che l'energia di taglio dipende dal tempo e dal campo magnetico perpendicolare, ma non dall'energia della particella. Ciò implica che comunque siano distribuite inizialmente le particelle in energia, ad un dato tempo  $t$  si è in ogni caso sicuri che nessuna particella avrà una energia residua superiore ad  $\epsilon_b$ .

## 1.3 Distribuzione in energia delle particelle

Si suppone una distribuzione in energia pari inizialmente ad una legge di potenza del tipo

$$N(\epsilon, 0) = N_0 \epsilon^{-\delta}$$

$N(\epsilon, t)d\epsilon$  è il numero di particelle per unità di volume con energia fra  $\epsilon$  e  $\epsilon + d\epsilon$ . Ci sono validi motivi per considerare una tale distribuzione, e inanzitutto quello che una legge di potenza nello spettro di energia produce una legge di potenza nello spettro in frequenza. Le osservazioni confermano che, almeno a basse frequenze, gli spettri di sincrotrone non autoassorbiti delle radiosorgenti descrivono leggi di potenza.

Il numero totale di particelle per unità di volume è

$$N_{TOT} = \int_{\epsilon_{min}}^{\epsilon_{max}} N_0 \epsilon^{-\delta} d\epsilon$$

I limiti  $\epsilon_{min}$  e  $\epsilon_{max}$  assicurano la convergenza dell' integrale e quindi un numero finito di particelle. La costante di normalizzazione della legge di potenza è legata a questi limiti dalla relazione

$$N_0 = \frac{(1 - \delta)N_{TOT}}{\epsilon_{max}^{1-\delta} - \epsilon_{min}^{1-\delta}}$$

Si ricava facilmente che ad un generico tempo  $t$  lo spettro in energia delle particelle è dato dall' espressione

$$N(\epsilon, t) = N_0 \epsilon^{-\delta} (1 - \epsilon/\epsilon_b)^{\delta-2} \quad (1.4)$$

Oltre l' energia di taglio non vi sono più particelle anche nel caso  $\delta = 2$ .

## 1.4 Iniezione continua

Come si è precisato lo spettro (1.4) si realizza se nel volume in cui sono confinati gli elettroni non vi è aggiunta di nuove particelle.

Consideriamo ora il caso in cui vi sia una iniezione continua, cioè istante dopo istante una nuova popolazione di elettroni, sempre distribuiti inizialmente secondo una legge di potenza, si aggiunge alle particelle già presenti.

Diciamo che fra  $\epsilon$  e  $\epsilon + d\epsilon$  si aggiungono particelle ad un ritmo

$$\frac{dN}{dt} = A\epsilon^{-\delta}$$

Le dimensioni di  $A$  sono  $cm^{-3}t^{-1}erg^{-2}$ .

Il numero totale di particelle, ad un dato istante  $t$ , si ottiene sommando nel tempo i contributi di tutte le popolazioni e, contemporaneamente, tenendo conto delle perdite energetiche

$$N(\epsilon, t) = \int_0^t A\epsilon^{-\delta} (1 - \epsilon/\epsilon_b)^{\delta-2} dt$$

con la posizione  $z = 1 - \epsilon/\epsilon_b$ , l' integrale si scrive

$$N(\epsilon, t) = \frac{A\epsilon^{-\delta-1}}{C_e H^2 \sin^2 \theta} \int_{1-\epsilon/\epsilon_b}^1 z^{\delta-2} dz$$

eseguendo l'integrazione risulta

$$N(\epsilon, t) = \frac{A\epsilon^{-\delta-1}}{(\delta-1)C_e H^2 \sin^2 \theta} [1 - (1 - \epsilon/\epsilon_b)^{\delta-1}] \quad (1.5)$$

Questo è lo spettro di energia nel caso di una iniezione continua di particelle.

Si hanno i seguenti andamenti asintotici:

per  $\epsilon \ll \epsilon_b$

$$N(\epsilon, t) \simeq A t \epsilon^{-\delta}$$

mentre per  $\epsilon \gg \epsilon_b$

$$N(\epsilon, t) \simeq \frac{A}{(\delta-1)C_e H^2 \sin^2 \theta} \epsilon^{-\delta-1}$$

Oltre l' energia di taglio non si ha più una drastica caduta del numero di particelle. L' effetto netto delle perdite radiative è quello di causare solo un irripidimento di

una unità nell' indice della legge di potenza iniziale.

Grazie al continuo rifornimento di nuove particelle, oltre l'energia di taglio si stabilisce una condizione di equilibrio.

La perdita di particelle di alta energia è bilanciata dall' introduzione di nuove particelle in modo tale che la forma dello spettro oltre  $\epsilon_b$  non varia nel tempo.

## 1.5 Distribuzione in angolo di inclinazione

È naturale che, se nella distribuzione in energia degli elettroni si origina un taglio legato al tempo, anche nello spettro di emissione si osserverà una corrispondente frequenza di taglio.

Per fissare le idee, si può considerare in prima approssimazione che ogni elettrone emetta tutta la sua potenza monocromaticamente alla frequenza critica  $\nu_c$ .

In questo caso, all' energia  $\epsilon_b$ , corrisponderà nello spettro di emissione una frequenza di taglio

$$\nu_b = \frac{C\nu}{C_e^2} (H \sin\theta)^{-3} t^{-2} \quad (1.6)$$

Oltre la frequenza di taglio l' emissività risulta nulla in questa approssimazione.

Ci si rende quindi conto di come, dall'osservazione dello spettro di sincrotrone, si possa ottenere una stima del tempo trascorso dall' ultima riaccelerazione delle particelle.

Si osservi come nelle formule scritte fino a questo punto compare non solo l'energia  $\epsilon$  ma anche l'angolo di inclinazione  $\theta$  delle particelle.

Esistono due modi estremi di gestire questo angolo:

si può supporre che ogni particella conservi immutato il proprio angolo su scale di tempo più grandi del tempo  $t$  al quale si compie l' osservazione, oppure si ammette che l' angolo cambi, per cause da precisare, su scale di tempo molto più piccole rispetto al tempo  $t$ .

Nel primo caso si avrà a che fare con modelli di Kardashev-Pacholczyk (KP; Kardashev 1962, Pacholczyk 1970), nel secondo caso con modelli di Jaffe-Perola (JP; Jaffe e Perola 1973).

Nei modelli KP non esiste una sola  $\epsilon_b$  valida per tutte le particelle, particelle con  $\theta$  diversi avranno energie di taglio diverse.

Nei modelli JP, al contrario, ogni particella avrà sperimentato, fino al momento dell' osservazione tutti i possibili angoli di inclinazione con il campo magnetico. Esisterà quindi una sola  $\epsilon_b$  valida per tutte le particelle, il suo valore si determina sostituendo nella (1.3) il  $\sin^2\theta$  con la sua media su tutto l'angolo solido

$$\langle \sin^2\theta \rangle = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin^3\theta d\theta d\phi = \frac{2}{3}$$

Da quanto detto, dovrebbe risultare chiaro che, per studiare l' evoluzione dell' emissione nel tempo, non è sufficiente dire quale sia lo spettro iniziale di energia degli elettroni, ma è anche necessario precisare quale sia la distribuzione iniziale degli angoli di inclinazione e quale dei due modelli, KP o JP, sta agendo.

Un caso semplice è quello di un' unica immissione isotropa di elettroni a  $t=0$ . Supponiamo che il campo magnetico abbia direzione  $\theta = 0$ , e che  $\phi$  misuri gli angoli in un piano perpendicolare ad H. Sia  $N(\theta, \phi)d\theta d\phi$  il di elettroni il cui vettore velocità

ha direzione compresa fra  $\theta$  e  $\theta + d\theta$ , e fra  $\phi$  e  $\phi + d\phi$ . Allora, in virtù dell' isotropia, si ha

$$\frac{N(\theta, \phi)d\theta d\phi}{N_{TOT}} = \frac{d\Omega}{4\pi}$$

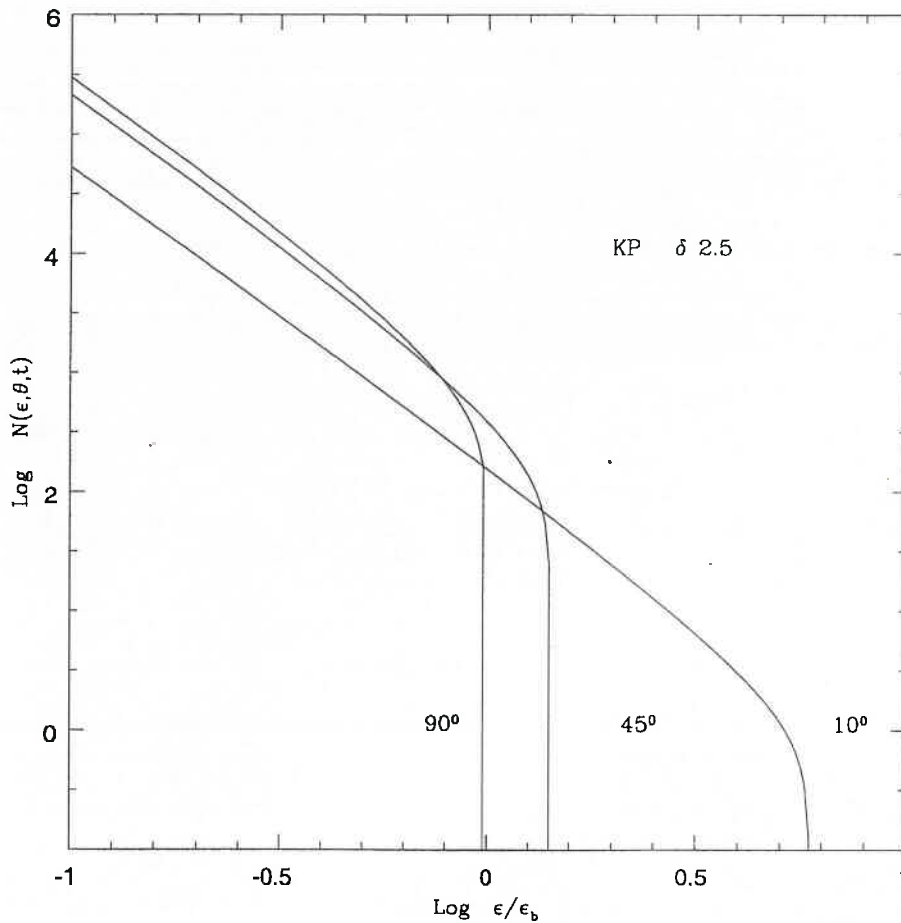
integrando in  $\phi$  si ottiene

$$N(\theta)d\theta = N_{TOT} \frac{\sin\theta}{2} d\theta$$

Combinando con la (1.4) si ricava la distribuzione degli elettroni in energia ed angolo di inclinazione ad un dato tempo  $t$

$$N(\epsilon, \theta, t) = N_0 \epsilon^{-\delta} \left(1 - \frac{\epsilon}{\epsilon_b}\right)^{\delta-2} \frac{\sin\theta}{2} \quad (1.7)$$

Nel modello KP  $\epsilon_b$  è funzione di  $\theta$ , la popolazione di elettroni con  $\theta = 90^\circ$  possiede l' energia di taglio più bassa, le popolazioni con  $\theta$  minore hanno energia di taglio più elevata. In pratica si sviluppa una coda di particelle di alta energia e piccolo angolo di inclinazione.



Nel modello JP, invece, esiste una sola energia di taglio per tutte le popolazioni e



nessuna particella ha un' energia superiore a questa.

## 1.6 Spettro di emissione in approssimazione monocromatica

Esaminiamo, inizialmente, modelli KP e JP.

Come prima approssimazione, supponiamo che l' emissione avvenga in maniera monocromatica alla frequenza critica.

L' emissività monocromatica, ossia la potenza emessa ad una data frequenza  $\nu$  al tempo  $t$  per unità di volume e di frequenza, si ottiene sommando il contributo di tutte le popolazioni in  $\theta$  di elettroni che hanno una precisa energia.

Il valore di questa energia si ottiene invertendo la (1.2).

$$J(\nu, t) = \int_0^\pi -\frac{d\epsilon}{dt} N(\epsilon, \theta, t) \frac{d\epsilon}{d\nu} d\theta$$

sostituendo la derivata dell' energia rispetto alla frequenza si ottiene

$$J(\nu, t) = \text{costante} \cdot \int_0^\pi \nu^{-\alpha_{in}} \left(1 - \sqrt{\frac{\nu}{\nu_b(\theta)}}\right)^{\delta-2} (\sin\theta)^\sigma d\theta \quad (1.8)$$

$$\alpha_{in} = \frac{\delta - 1}{2}$$

$$\sigma = \frac{\delta + 3}{2}$$

Tutta la differenza fra i modelli JP e KP, risiede nel fatto che la frequenza di taglio non assume la stessa dipendenza da  $\theta$  per i due.

$$\nu_b(\theta)_{KP} = \text{Cost} \cdot (H \sin\theta)^{-3} t^{-2}$$

$$\nu_b(\theta)_{JP} = 2.25 \cdot \text{Cost} \cdot H^{-3} (\sin\theta) t^{-2}$$

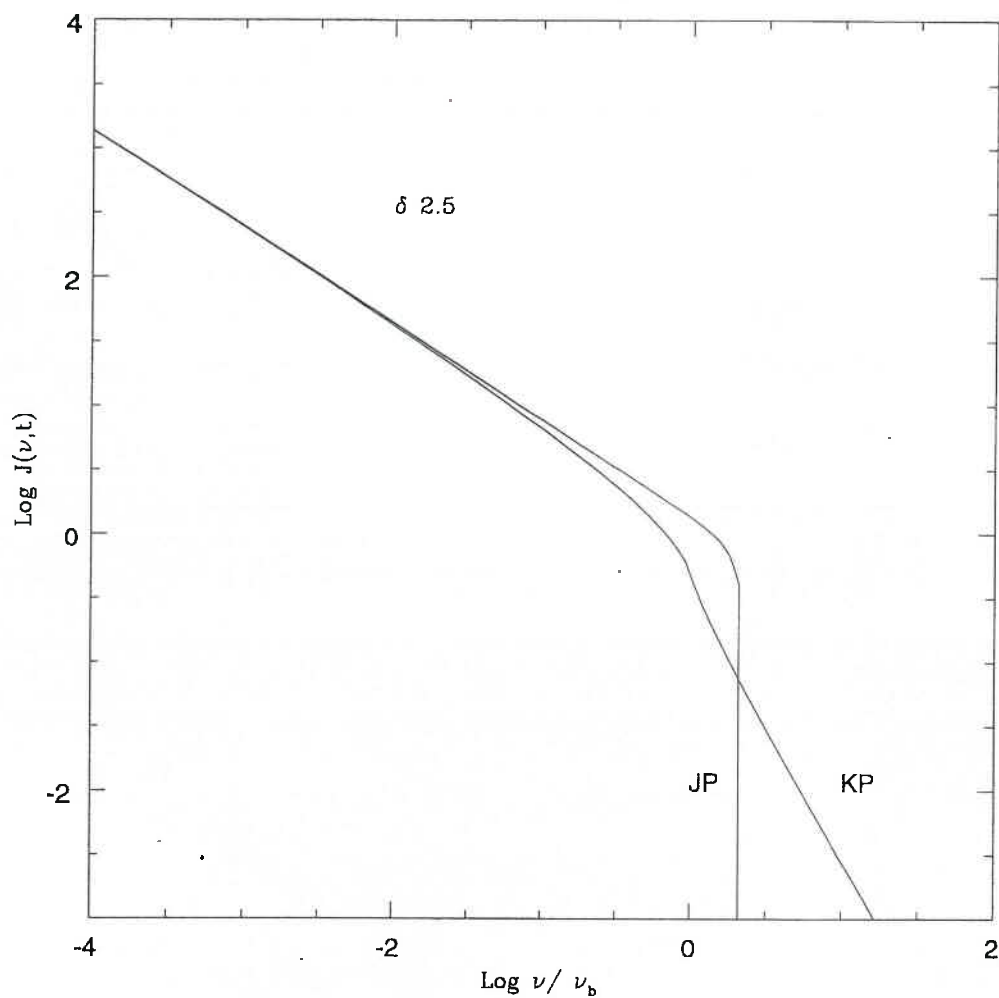
$$\text{Cost} = \frac{C_\nu}{C_e^2}$$

Come si vede, la frequenza di taglio per il JP raggiunge il suo valore massimo per  $\theta = 90^\circ$ , oltre questa frequenza non vi è più emissione. In questo modello, lo spettro di emissione presenta un taglio nettissimo alla  $\nu_b$ .

Diverso è il discorso per il KP. In questo infatti, al tendere di  $\theta$  a zero, l' energia di taglio tende ad infinito. Come risultato l' emissività non è mai nulla, anche oltre la frequenza di taglio corrispondente a  $\theta = 90^\circ$ .

Nel KP quello che si osserva è solo un irripidimento dello spettro alla frequenza di taglio. L' emissività segue ancora una legge di potenza, questa volta con indice spettrale  $(\frac{4}{3}\alpha_{in} + 1)$ .

In figura sono rappresentate due soluzioni numeriche della (1.8) corrispondenti a due modelli KP e JP con  $\delta = 2.5$ ,  $\alpha_{in} = 0.75$ .



Gli spettri sono normalizzati in frequenza alla rispettiva  $\nu_b(90^\circ)$ .  
 I due andamenti sono direttamente confrontabili, nel senso che il tempo di osservazione ed il campo magnetico sono gli stessi sia per il KP che per il JP.  
 H e t sono stati scelti in modo tale che  $\nu_b(90^\circ)_{KP} = 1$ , di conseguenza  $\nu_b(90^\circ)_{JP} = 2.25$ .

## 1.7 Spettro convoluto

L' approssimazione di emissione monocromatica alla frequenza critica è sufficiente ad evidenziare le differenze qualitative fra i due modelli.

Ma, se si vuole ottenere uno spettro realistico, bisogna tener conto che ogni particella irradia a tutte le frequenze secondo lo spettro ben definito dato da

$$-\frac{d\epsilon}{dt d\nu} = C_f H \sin\theta F(x) \quad (1.9)$$

Risolvendo i potenziali ritardati nell' approssimazione  $\gamma \gg 1$  si trova che

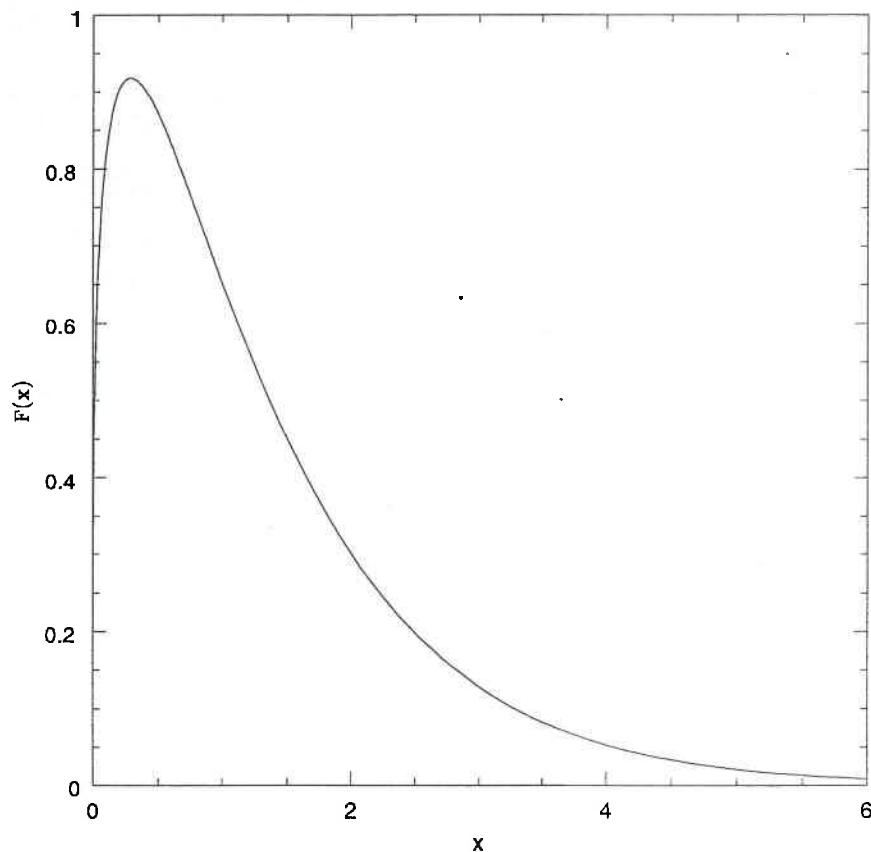
$$F(x) = x \int_x^\infty K_{\frac{5}{3}}(z) dz$$

$$x = \frac{\nu}{C_\nu H \sin\theta \epsilon^2}$$

dove  $K_{\frac{5}{3}}(z)$  è la funzione di Bessel modificata del secondo tipo di ordine  $5/3$ .

Per determinare esattamente la funzione  $F(x)$  è necessario conoscere per ogni  $x$  la funzione di Bessel  $K_{\frac{5}{3}}(x)$ .

Sfortunatamente non esiste nessuna combinazione di funzioni analitiche elementari tramite le quali esprimere questa funzione.  $F(x)$  può essere quindi determinata esclusivamente in forma numerica.



L' emissività per unità di frequenza ad un certo tempo, si ottiene quindi convolvendo lo spettro di emissione di ogni singolo elettrone con la distribuzione di energia delle particelle.

$$J(\nu, t) = \int_0^\pi \int_0^{\epsilon_b(\theta)} \frac{d\epsilon}{dt d\nu} N(\epsilon, \theta, t) d\epsilon d\theta \quad (1.10)$$

Si noti che nell' integrale dell' emissività monocromatica (1.8) non compare in alcuna forma l' energia  $\epsilon$ . Grazie infatti alla (1.2) è stato possibile sostituirla con la frequenza  $\nu$ .

Se però, si suppone che ogni elettrone emetta su tutte le frequenze, come descritto dalla 1.9, non è più possibile eliminare l' energia dall' integrale.

Risulta così che la vera emissività è data dall' integrale doppio

$$J(\nu, t) = C \cdot \int_0^\pi \int_0^{\epsilon_b(\theta)} F\left(\frac{\nu}{C_\nu H \sin\theta \epsilon^2}\right) \epsilon^{-\delta} \left(1 - \frac{\epsilon}{\epsilon_b(\theta)}\right)^{\delta-2} \sin^2\theta d\epsilon d\theta \quad (1.11)$$

Il valore numerico della costante moltiplicativa  $C$  non è importante ai fini pratici come risulterà chiaro in seguito.

L' integrale (1.10) è stato risolto numericamente per i modelli KP, JP e CI. La differenza sostanziale fra la (1.8) e la (1.11) sta tutta nel fatto che l' emissività reale ad una data frequenza non è più data solo dagli elettroni di una certa energia, ma tutte le particelle di ogni energia contribuiscono all' emissività ad una data frequenza.

Dalla (1.11) si ottengono i due modelli JP e KP corretti considerando le diverse energie di taglio

$$\epsilon_{bJP} = \frac{1.5}{C_\epsilon H^2 t}$$

$$\epsilon_{bKP}(\theta) = \frac{1}{C_\epsilon (H \sin\theta)^2 t}$$

La costante di normalizzazione  $C$  è legata al campo  $H$  e alla costante  $N_0$  dalla formula

$$C = C_f H N_0$$

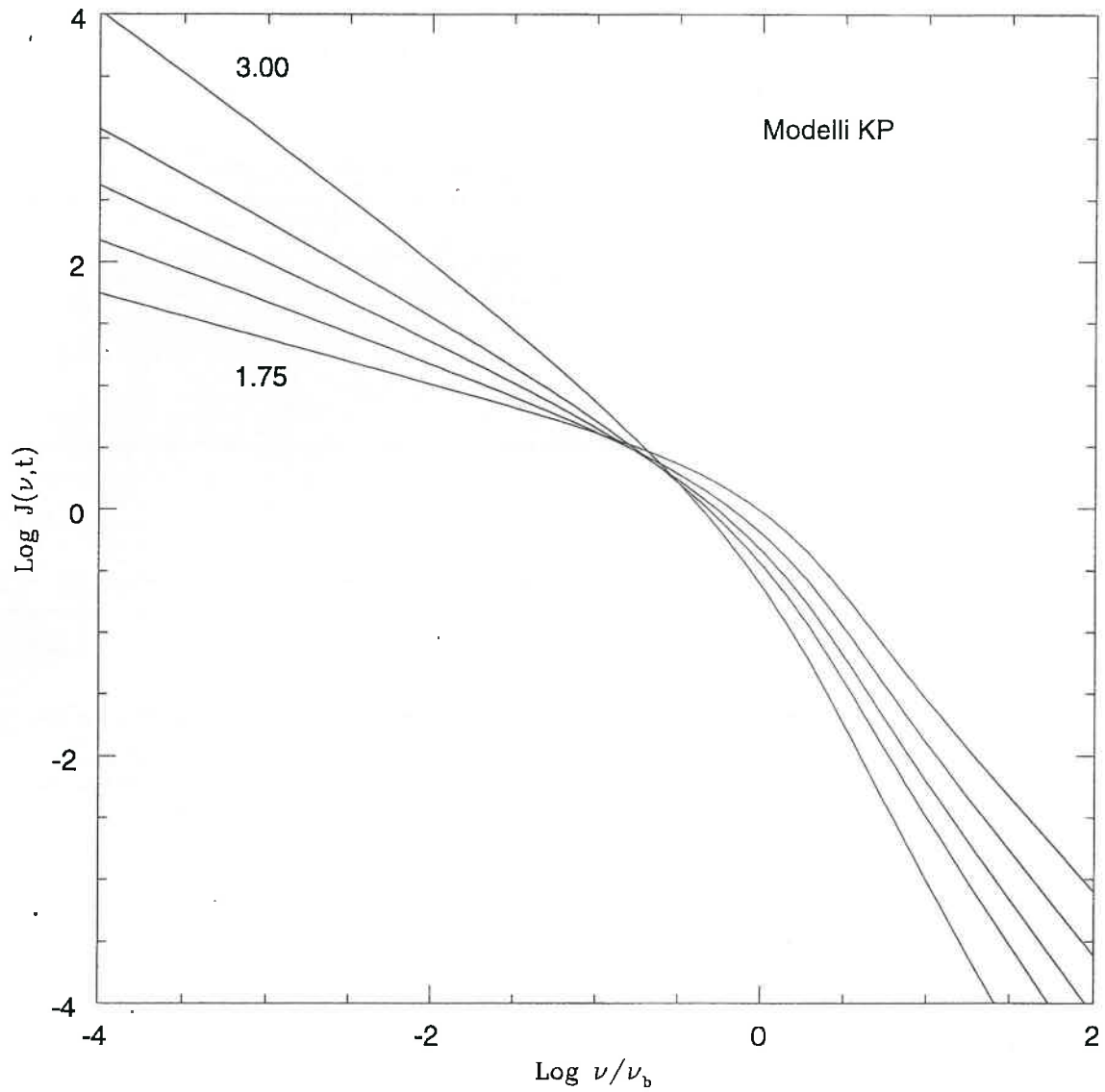
con

$$C_f = \frac{C_\epsilon}{AC_\nu}$$

e

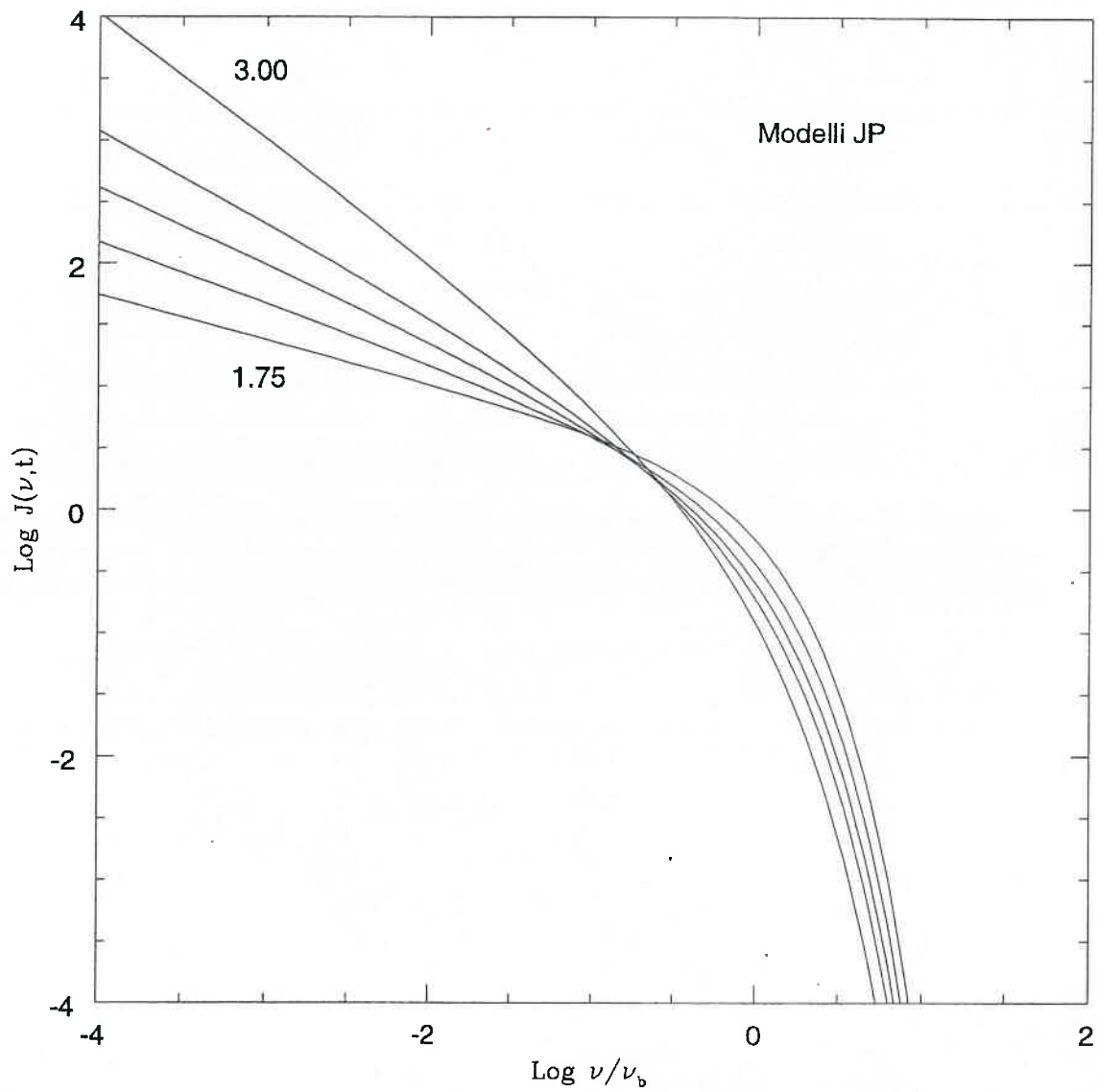
$$A = \int_0^\infty F(u) du$$

In figura sono mostrate le soluzioni della (1.11) per modelli KP con vari  $\delta$  (3.0,2.50,2.25,2.00,1.75).



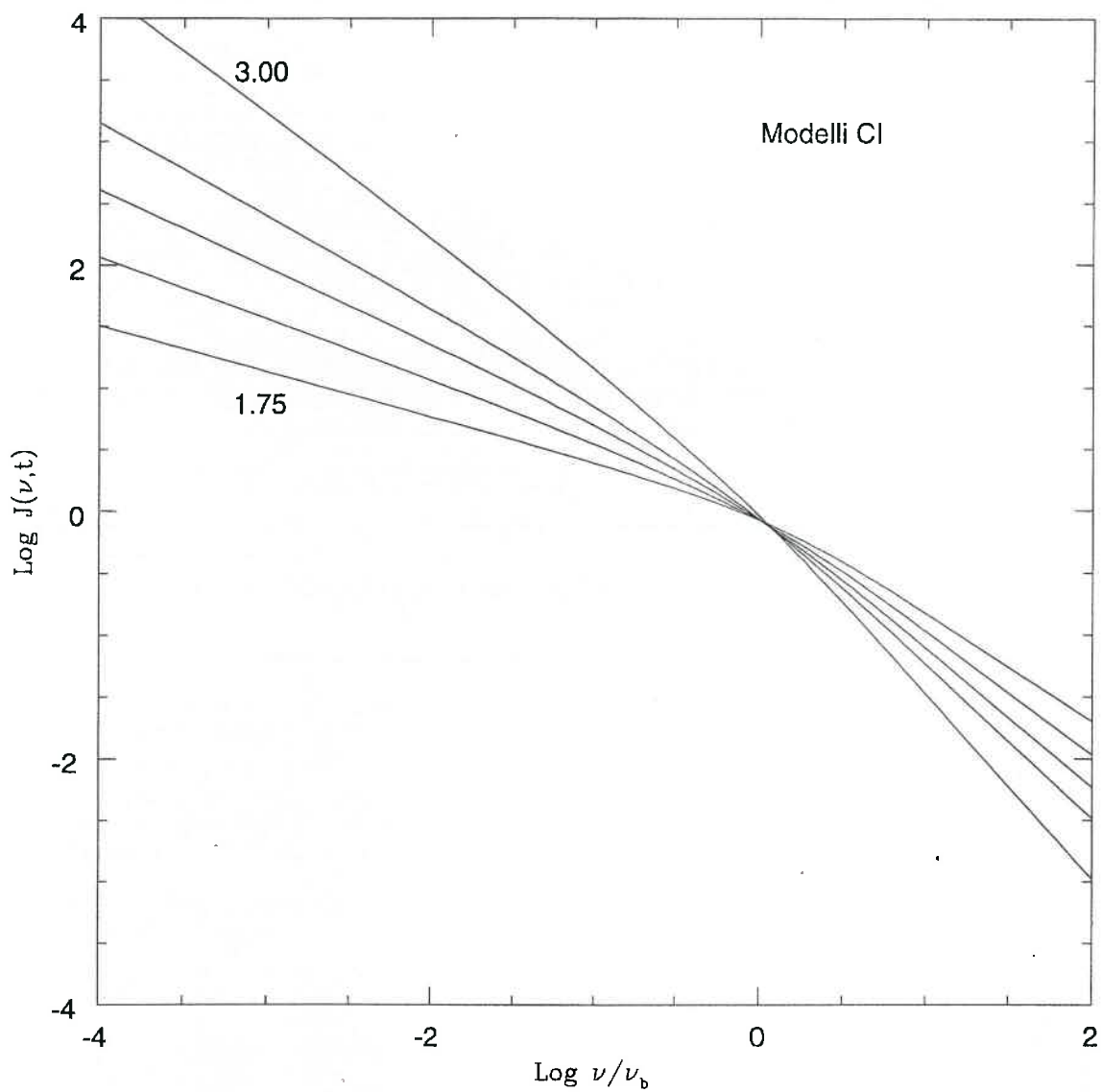
La normalizzazione in frequenza è tale che  $\nu_b = 1$ , mentre l' emissività  $J(\nu, t)$  è graficata in unità arbitrarie.

Nel grafico sono rappresentate ancora delle soluzioni della (1.11), questa volta per modelli JP (stessi  $\delta$ ).



Si noti come l' emissività sia non nulla anche oltre la frequenza di taglio.

I modelli di iniezione continua si ottengono sempre dalla (1.11) sostituendo la distribuzione di energia (1.5) al posto della (1.4).



Oltre la frequenza di taglio gli spettri di iniezione assumono ancora la forma di una legge di potenza con indice spettrale  $\alpha_{in} + 0.5$ .

## 1.8 Età di sincrotrone

L'evoluzione nel tempo degli spettri dei modelli presentati si può così riassumere: Per  $t = 0$ , iniezione delle particelle, lo spettro descrive una legge di potenza  $J(\nu, 0) \propto \nu^{-\alpha_{in}}$ , conseguenza del fatto che la distribuzione iniziale in energia degli elettroni è anche essa una legge di potenza con indice  $\delta = 2\alpha_{in} + 1$ .

Con il trascorrere del tempo, le perdite per radiazione di sincrotrone modificano la distribuzione di energia delle particelle, coinvolgendo per prime le particelle di più alta energia. Lo spettro di emissione mantiene la forma di una legge di potenza più o meno fino alla frequenza di taglio della popolazione (in angolo) che domina l'emissione. Nei modelli fino a qui considerati l'insieme di elettroni che dominano l'emissione sono quelli con angolo di inclinazione  $\theta = 90^0$  rispetto alla direzione del campo magnetico.

Oltre la frequenza di taglio lo spettro si irripidisce, come si è visto, in un modo che varia a seconda del modello.

Il problema della determinazione dell'età di sincrotrone consiste quindi, in primo luogo nel capire che tipo di modello descrive meglio la situazione fisica in cui si sono evoluti gli elettroni, e di seguito nel riuscire a determinare il valore della frequenza di taglio e del campo magnetico.

Diciamo subito che, da qui in avanti, quando ci si riferirà alla frequenza di taglio, si intenderà in ogni caso la frequenza di taglio della popolazione di particelle con  $\theta = 90^0$ .

$$\nu_{bKP} = \frac{C_\nu}{C_e^2} \cdot H^{-3} t^{-2} \quad (1.12)$$

$$\nu_{bJP} = 2.25 \cdot \frac{C_\nu}{C_e^2} \cdot H^{-3} t^{-2} \quad (1.13)$$

Per quanto riguarda il modello di iniezione continua, la frequenza di taglio che si deve assumere ha la stessa espressione di quella del JP.

In realtà non vi differenza, per quanto riguarda la forma dello spettro di emissione, fra un modello di iniezione continua JP oppure KP.

Infatti, in entrambe i casi sono le particelle appena iniettate a dominare l'emissione. In ogni caso, dato che il modello CI presentato è stato integrato a partire da un JP, si deve assumere anche per la  $\nu_{bCI}$  la stessa dipendenza da  $t$  e da  $H$  della (1.13).

Detto questo, invertendo la (1.13), si ottiene la formula per l'età di sincrotrone, valida per un JP, espressa in milioni di anni

$$t_S = 1610 \cdot H^{-3/2} \nu_b^{-1/2} \quad [Myr] \quad (1.14)$$

dove il campo magnetico  $H$  è espresso in micro Gauss e la frequenza di taglio in Giga Hertz.

A parità di tempo e di campo magnetico, risulta, per come si sono normalizzati gli spettri, che  $\nu_{bJP} = 2.25 \cdot \nu_{bKP}$ .

È opportuno chiarire meglio la situazione.

Supponiamo che si siano ricavate le frequenze di taglio del KP e del JP dal confronto con uno spettro osservato. A questo punto ci sono due possibilità: o si usano due formule diverse per calcolare l'età, oppure si moltiplica la frequenza di taglio risultante dal fit del modello KP per 2.25 e si usa la sola formula (1.14).

Per evitare qualsiasi confusione, precisiamo subito che tutti i modelli qui presentati, grafici compresi, sono normalizzati in modo tale che a parità di tempo e di campo magnetico  $\nu_{bJP} = 2.25 \cdot \nu_{bKP}$ .

Quindi, a parità di frequenza di taglio e di campo magnetico il tempo di sincrotrone calcolato sulla base di un JP è 1.5 volte più grande di quello risultante per il modello KP.



Di conseguenza la formula per l'età di sincrotrone di quest' ultimo modello si ottiene moltiplicando per 2/3 la (1.14).

Spesso, in letteratura, si tende ad usare per  $t_S$  sempre e solo la formula (1.14) sia per il JP che per il KP, e quindi si moltiplica ad arte la frequenza di taglio del modello KP per 2.25. Si ha così il vantaggio di dover utilizzare una sola formula per l' età.

Si deve prestare attenzione al fatto che in letteratura, chi usa una sola formula per  $t_S$ , poi presenta, sia nei tabulati che nei grafici, la frequenza di taglio del KP già moltiplicata per 2.25.

## 1.9 Spettri a due frequenze

Una volta in possesso di spettri realistici, vediamo come si possa determinare la frequenza di taglio dalla misura dell' indice spettrale fra due frequenze  $\alpha_{\nu_1}^{\nu_2}$ .

Per definizione

$$\alpha_{\nu_1}^{\nu_2} = - \frac{\text{Log}S(\nu_1) - \text{Log}S(\nu_2)}{\text{Log}\nu_1 - \text{Log}\nu_2}$$

dove  $S(\nu_1)$  e  $S(\nu_2)$  sono i flussi misurati alle rispettive frequenze.  
L' idea è molto semplice:  
per  $t = 0$   $\alpha_{\nu_1}^{\nu_2}$  è pari all' indice di iniezione

$$\alpha_{in} = \frac{\delta - 1}{2}$$

Infatti  $\nu_b \rightarrow \infty$  per  $t \rightarrow 0$ .

Al passare del tempo la frequenza di taglio decresce nel tempo come  $t^{-2}$ . Man mano che la  $\nu_b$  si avvicina alle nostre frequenze di osservazione  $\nu_1$  e  $\nu_2$  lo spettro diventa più ripido e  $\alpha_{\nu_1}^{\nu_2}$  aumenta in valore assoluto.

In pratica l' indice spettrale osservato è una funzione del rapporto fra  $\nu_1$  e  $\nu_b$ .

Ora, avendo gli spettri si può prevedere dettagliatamente l' andamento dell' indice spettrale in funzione della frequenza di taglio per un dato  $\delta$  e per un dato modello. Dal confronto fra l' indice spettrale osservato e quello calcolato siamo quindi in grado di determinare il rapporto fra la frequenza di taglio e una delle frequenze di osservazione.

Di fatto  $\delta$  non è un osservabile; in realtà ciò che si misura è sempre l' indice spettrale.

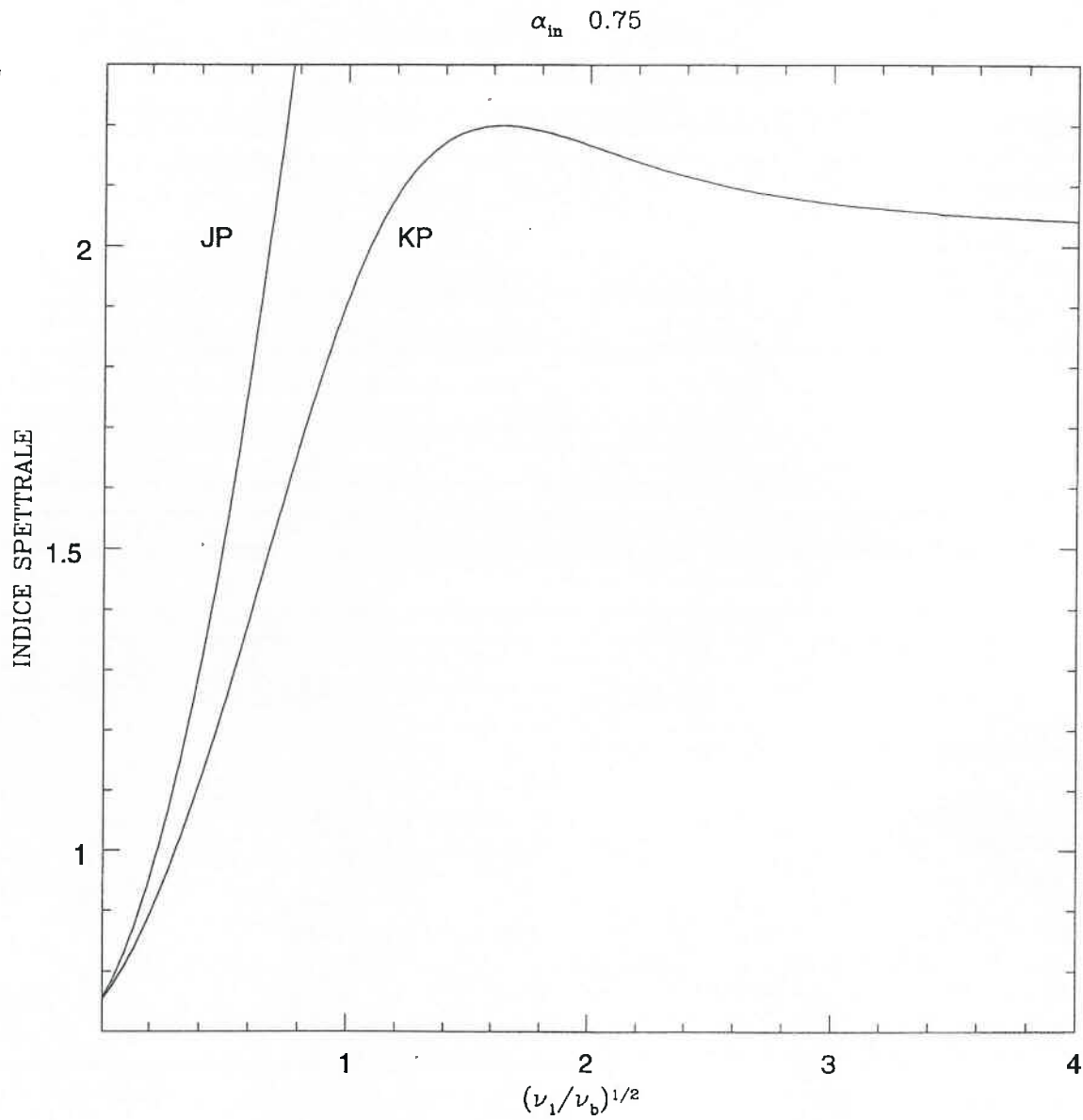
È impossibile determinare esattamente  $\delta$  da uno spettro a due frequenze. Nello stesso modo non sarà possibile capire che tipo di modello, JP o KP, si realizza nella sorgente.

Per riuscire a discriminare fra i due modelli o anche a determinare il  $\delta$  dalla sola analisi dello spettro radio sono necessarie misure a più frequenze.

Segue in figura un profilo dell' indice spettrale in funzione del parametro  $\sqrt{\nu_1/\nu_b}$ , ossia del tempo, per due modelli JP e KP.

$\alpha_{in}$  è 0.75 per entrambe i modelli, mentre l' indice spettrale aspettato è calcolato fra  $\nu_1 = 1.4$  e  $\nu_2 = 4.9$  Giga Hertz.

L' emissività di modello KP con  $\alpha_{in} = 0.75$  per  $\nu \gg \nu_b$  assume ancora la forma di una legge di potenza con  $\alpha = 2.00$ . In realtà, come si può notare, l' indice spettrale massimo non è quello asintotico.



## 1.10 Spettri multifrequenza

La situazione degli spettri si può così riassumere:

Per ognuno dei tre diversi modelli KP, JP, e CI, è stata determinata numericamente

l' emissività  $J(\nu, t)$ , per qualsiasi  $\nu$  e  $\delta$ , ad un certo  $t \propto \nu_b^{-1/2}$ .

Sia la dipendenza dell' emissività dal tempo ad una data frequenza, che la forma dello spettro, ad un dato tempo, in funzione della frequenza dipendono solo dal rapporto  $\nu/\nu_b$ .

In poche parole, al trascorrere del tempo lo spettro si sposta rigidamente dalle alte alle basse frequenze, con una rapidità tanto maggiore quanto più grande è il campo magnetico.

Si ha così la libertà di scegliere il campo magnetico e il tempo in maniera opportuna da rinormalizzare l' energia di taglio della popolazione di  $90^\circ$ . Tutti gli spettri numerici sono stati calcolati considerando

$$\epsilon_b(90^\circ) = 1$$

$$\nu_b(90^\circ) = 1$$

Anche la costante moltiplicativa dell' integrale non è importante ai fini della determinazione della forma dello spettro e può essere posta uguale ad 1 scegliendo opportunamente  $N_0$ .

Le osservazioni radio con cui ci si deve confrontare consistono, generalmente, in una serie di misure discrete di flusso a due o più frequenze.

Ciò che si desidera è ricavare  $t$  (ossia  $\nu_b$ ) e  $\delta$  conoscendo lo spettro  $J(\nu)$  solo in alcuni punti.

Ai fini della stima dell' età, ci si può disinteressare della determinazione della costante di normalizzazione  $C$ , anche se bisogna sempre tenere a mente che, insieme a  $\delta$  e  $\nu_b$ , è uno dei tre parametri incogniti di ogni modello.

È chiaro che al variare di  $\delta$ ,  $\nu_b$ , e  $C$  la forma di un dato modello nel piano  $J - \nu$  si modifica.

Si confida di aver determinato la miglior stima di  $\delta, C$ , e  $\nu_b$ , quando la somma

$$\chi^2 = \sum_i \frac{(J_j - J)^2}{\sigma_i^2} \quad (1.15)$$

è minima.

$J_j$  è il flusso misurato alla frequenza  $\nu_i$ , e  $\sigma_i$  è l' errore su questa misura (si suppone che gli errori delle misure siano distribuiti gaussianamente).

Ora, dato che gli spettri teorici non sono esprimibili in forma analitica neppure la funzione  $\chi^2$  lo è. Si capisce così che per minimizzare la (1.15) si deve ricorrere ancora ad algoritmi numerici.

È stato realizzato un programma FORTRAN che permette di adattare, tramite la minimizzazione numerica del  $\chi^2$ , gli spettri teorici a quelli osservati.

## Capitolo 2

### 2.1 Il programma SYNAGE

SYNAGE (SYNchrotron AGE) rende possibile adattare gli spettri dei modelli KP, JP, e CI, descritti nel capitolo precedente, a misure di flusso a due o più frequenze.

Il programma è strutturato per funzionare in ambiente UNIX e si attiva con il comando "synage". Per le modalità di installazione si rimanda all'appendice A.

### 2.2 Devices

Quando SYNAGE viene lanciato per la prima volta comparirà l'avviso:

```
WARNING:SYNAGE_file SYNAGE_cfg not exists  
Configuration file created.
```

Il programma ha bisogno di un file di configurazione nel quale registrare le devices che ogni utente desidera adoperare. Ovviamente la prima volta tale file non esiste, SYNAGE lo crea scrivendoci le devices di default. Tale avvertimento non comparirà più nel seguito.

Saranno invece sempre mostrate le devices video e stampante laser usate dal programma:

```
Devices:  
  
Video=x11  
Laser printer=ira306ps  
  
1 =>Continue  
2 =>Change devices  
3 =>Save current devices  
4 =>End program
```

L'opzione 2 permette di modificare queste devices, in particolare la stampante laser. Con l'opzione 3 queste devices vengono memorizzate dal programma, in modo tale da non doverle inserirle ogni volta in seguito.

Si consiglia vivamente di non modificare la device video X11. In ogni caso, se proprio questa non è disponibile, si può provare una delle device mostrate nell'appendice A.

## 2.3 La tabella dei dati

Subito dopo aver definito le devices SYNAGE chide il nome della tabella dati

```
Name of data table:ngc1265
```

Per poter utilizzare il SYNAGE è assolutamente necessario disporre i propri dati in forma ordinata in una tabella da scrivere con un comune editor di testo. I "point" sono gli elementi costitutivi di ogni tabella dati e possono essere numerati con qualsiasi intero maggiore o pari ad 1. In ogni point devono essere raccolte le misure corrispondenti ad un singolo spettro.

Distinguiamo i vari casi.

- a) Sono in possesso di varie misure dell' indice spettrale fra una determinata coppia di frequenze, per esempio 1465 e 4860 MHz, allora per ogni point scrivo la coppia delle frequenze, l' indice spettrale, e il suo errore:

```
point 1
1465.0 4860.1 0.81 0.03
point 2
1465.0 4860.1 0.76 0.02
point 3
1465.0 4860.1 0.65 0.02
point 4
1465.0 4860.1 0.56 0.01
point 5
1465.0 4860.1 0.52 0.01
point 6
1465.0 4860.1 0.45 0.07
point 7
1465.0 4860.1 0.73 0.07
point 8
1465.0 4860.1 0.69 0.04
point 9
1465.0 4860.1 0.66 0.03
```

- b) Ho sempre spettri a due frequenze, ma questa volta con la misura del flusso e del rispettivo errore ad ogni frequenza. Allora per ogni point scrivo frequenza1,flusso1,e sigma sul flusso1 e subito sotto frequenza2,flusso2,e sigma sul flusso2:

```
point 8
327.0 158.0 8.0
610.0 100.0 5.0
point 9
327.0 156.0 8.0
610.0 94.0 5.0
point 10
327.0 142.0 5.0
610.0 78.0 4.0
```

c) Sono in possesso di spettri a più frequenze. Per ogni frequenza ho la misura del flusso e dell' errore, allora per ogni point ordino una sotto l' altra le misure di frequenza, flusso, e sigma sul flusso.

point 3		
80.0	2.0	0.2
178.0	4.0	0.3
408.0	3.6	0.1
1400.0	2.26	0.1
2700.0	1.7	0.1
5000.0	1.29	0.1
10600.0	0.95	0.05
230000.0	0.065	0.009
point 4		
80.0	6.0	0.6
178.0	7.8	0.4
408.0	8.0	0.3
1400.0	8.1	0.3
2700.0	5.1	0.2
5000.0	2.86	0.15
8300.0	1.62	0.06
10600.0	1.33	0.04
90000.0	0.027	0.007
230000.0	0.017	0.005
point 5		
80.0	3.0	0.2
178.0	4.0	0.3
408.0	2.6	0.1
1400.0	1.26	0.1
2700.0	0.7	0.1

La tabella può essere compilata in modo misto nel senso che point diversi possono contenere un numero di frequenze diverso.

point 7			
327.0	165.0	8.0	
610.0	110.0	6.0	
10600.0	3.0	1.0	
point 8			
327.0	158.0	8	
610.0	100.0	5	
point 9			
1465.0	4860.1	0.66	0.03

Per specificare che tipo di unità di misura si stanno adoperando in un particolare point, si deve anteporre la dicitura "unity" seguita subito sotto dall' unità di misura della frequenza e da quella del flusso.

```

unity
MHz
mJy
point 1
327.0      5576.0   250.0
610.0      4202.0   210.0
4750.0     1173.0    47.0
10600.0    603.0     24.0
point 2
327.0      6082.0   250.0
610.0      4306.0   215.0
4750.0     1121.0    44.0
10600.0    492.0     19.0

```

L' utente ha ampia libertà nel scrivere queste unità. Nel senso che queste vengono passate al programma come semplici label, ragion per cui qualsiasi dicitura può andar bene (*MHz*, [*MHz*], *Mega Hertz*, *1e6Hz*, etc..). Il programma considera con tali unità tutte le misure di flusso e frequenza dei point sottostanti alla dicitura "unity". Per esempio se una unica dichiarazione viene fatta ad inizio tabella allora SYNAGE considera tutte le misure della tabella consistenti con tali unità. L' utente ha pure la libertà di inserire, se lo desidera, una label di commento a sua scelta in ogni point. La label deve essere preceduta dalla dicitura "label:" come mostrato subito sotto

```

point 1
label:DISTANCE 15 Kpc
327.0      5576.0   250.0
610.0      4202.0   210.0
4750.0     1173.0    47.0
10600.0    603.0     24.0
point 2
label:DISTANCE 30 Kpc
327.0      6082.0   250.0
610.0      4306.0   215.0
4750.0     1121.0    44.0
10600.0    492.0     19.0

```

Questa label utente comparirà in tutti i grafici creati in seguito da SYNAGE, la sua lunghezza non deve eccedere comunque i 70 caratteri.

Una volta che la tabella dati è stata riconosciuta dal programma, viene chiesto preventivamente da SYNAGE il nome della tabella dei risultati.

```
Name of output table:ris.ngc
```

```
WARNING:SYNAGE_file already exists
```

```
ris.ngc
```

```
1=> Try another name  
2=> Go to end of table  
3=> End program
```

```
==>
```

Va bene qualsiasi nome che non ecceda 80 caratteri.

Nel caso in cui è già presente un file con questo nome nella directory, come nel caso mostrato sopra, è possibile, volendo, posizionarsi a fine tabella con l'opzione 2.

Per una questione di ordine è consigliabile raccogliere le tabelle dati in una sola directory e quindi, da questa, lanciare SYNAGE.



## 2.4 I parametri del modello

Subito dopo aver definito le tabelle il programma chiede di selezionare il tipo di modello che si intende usare

```
Model 1 =>KP 2 =>JP 3 =>CI
```

```
==>
```

Si deve quindi definire il  $\delta$  del modello. In realtà il programma chiede di scegliere l'indice spettrale di iniezione ("alpha in"), cioè l'indice spettrale della parte non evoluta dello spettro in cui

$$S \propto \nu^{-\alpha_{in}}$$

con

$$\alpha_{in} = \frac{\delta - 1}{2}$$

Si hanno a disposizione modelli con  $\alpha_{in}$  compreso fra 0.375 e 1.0, ossia  $\delta$  fra 1.75 e 3.00.

```
Injection spectral index [ flux~freq^(-Alpha_in) ]  
(1.0<Alpha_in<0.375)
```

```
Alpha_in=
```

Una volta fatta la selezione dei parametri del modello segue un riepilogo di devices, tabelle, e parametri del modello

```
Parameters:
```

```
Video..... x11  
Printer..... ira306ps  
Data table.... ngc1265  
Output table.. ris.ngc  
Model..... KP  
Alpha_in..... 0.500  
Delta..... 2.000
```

```
1 =>Continue  
2 =>Change only model parameters  
3 =>Change tables and devices  
4 =>End program
```

Se si è soddisfatti delle scelte fatte si può procedere all'analisi della tabella dati.

## 2.5 La lettura della tabella dati

Per muoversi all' interno della tabella dati si deve selezionare con "New point" il numero del point desiderato

Parameters:

```
Video..... x11
Printer..... ira306ps
Data table.... ngc1265
Output table.. ris.ngc
Model..... KP
Alpha_in..... 0.500
Delta..... 2.000
```

Old point 0

New point ==>

"Old point" si riferisce sempre al punto analizzato in precedenza. Se il New point selezionato è realmente presente nella tabella dati compariranno su schermo i dati in esso contenuti.

Per esempio nel caso di una misura dell' indice spettrale comparirà una schermata del tipo

Frequencies to include on fit:

---

Npoint	1		
Frequency 1	1435.	Frequency 2	4860. MHz
Spectral index	1.030	Sigma	0.070

---

Press ENTER to continue

Nel caso di più frequenze comparirà su schermo il loro elenco insieme alle misure di flusso ed errore. Compariranno inoltre le unità di misura (se definite) e l'eventuale label associata al point in esame.

Frequencies to include on fit:

---

Npoint		2	
	Frequency	Flux	Sigma
	MHz	mJy	mJy
1_	327.0	6082.	250.0
2_	610.0	4306.	215.0
3_	4750.	1121.	44.00
4_	0.1060E+05	492.0	19.00

DISTANCE 30 Kpc

---

Frequency to flag (ENTER =>none -1 =>Unflag)  
 ==>2

Frequencies to include on fit:

---

Npoint		2	
	Frequency	Flux	Sigma
	MHz	mJy	mJy
1_	327.0	6082.	250.0
FL_	610.0	4306.	215.0
3_	4750.	1121.	44.00
4_	0.1060E+05	492.0	19.00

DISTANCE 30 Kpc

---

Frequency to flag (ENTER =>none -1 =>Unflag)

Ogni misura viene numerata e può essere eliminata dal fit, se desiderato, inserendo il numero che la identifica.

Le frequenze eliminate vengono contrassegnate con la label *FL*, per riabilitare tutte le frequenze bisogna digitare -1 (Unflag).

Le misure che sono state eliminate non vengono considerate nella procedura di fit ma rientrano nella grafica finale.

Per procedere alla determinazione della frequenza di break bisogna semplicemente

premere ENTER.

## 2.6 La determinazione della frequenza di break

Distinguiamo fra due o più frequenze.

Nel caso in cui si abbia a disposizione la sola misura dell' indice spettrale fra due frequenze, SYNAGE determina direttamente la frequenza di break passando subito alla fase grafica. A meno che l' indice spettrale osservato non sia minore o pari a quello di iniezione:

```
Observed spectral index < or = Alpha_in
IMPOSSIBLE TO CONTINUE!
CHANGE POINT OR TRY NEW PARAMETERS
```

Press ENTER to continue

In tal caso il programma non può ovviamente proseguire.

Se nel point in esame sono presenti più di due frequenze, si deve adattare il modello teorico ai dati osservati minimizzando il  $\chi^2$ . SYNAGE lavora in questo modo:

Per prima cosa ottiene le frequenze di break corrispondenti agli indici spettrali osservati fra le varie frequenze determinando una frequenza di break media ("Starting break frequency").

Observed spectral indexes:

```
v1          v2          Alpha_obs.
327.0       610.0       0.554
Observed spectral index < Alpha_in
EXCLUDED.
```

```
v1          v2          Alpha_obs.
610.0       4750.         0.656
Vbreak= 0.2518E+05
```

```
v1          v2          Alpha_obs.
4750.       0.1060E+05   1.026
Vbreak= 0.1273E+05
```

```
Starting break frequency: 0.1896E+05
Injection spectral index: 0.554
```

Naturalmente, non possono contribuire alla media quelle coppie di frequenze fra le quali l' indice spettrale osservato è minore od uguale all' indice di iniezione del

modello, per esse infatti non è possibile determinare la frequenza di taglio. Potrebbe anche presentarsi il caso in cui, magari a causa di una cattiva scelta dei parametri, non sia possibile determinare nessuna frequenza di break. In tal caso SYNAGE suggerisce di provare con nuovi parametri, ma se proprio si vuole tentare con questi si può cercare di forzare il fit ("Force fit"):

I SUGGEST TO TRY NEW PARAMETERS.

1 =>Change parameters 2 =>Force fit

==>2

I guess break frequency= 0.1060E+05  
Probably the fitting procedure will take a lot of time.  
However you can always stop the fit every 5 iterations.

Starting break frequency: 0.1060E+05  
Injection spectral index: 1.000

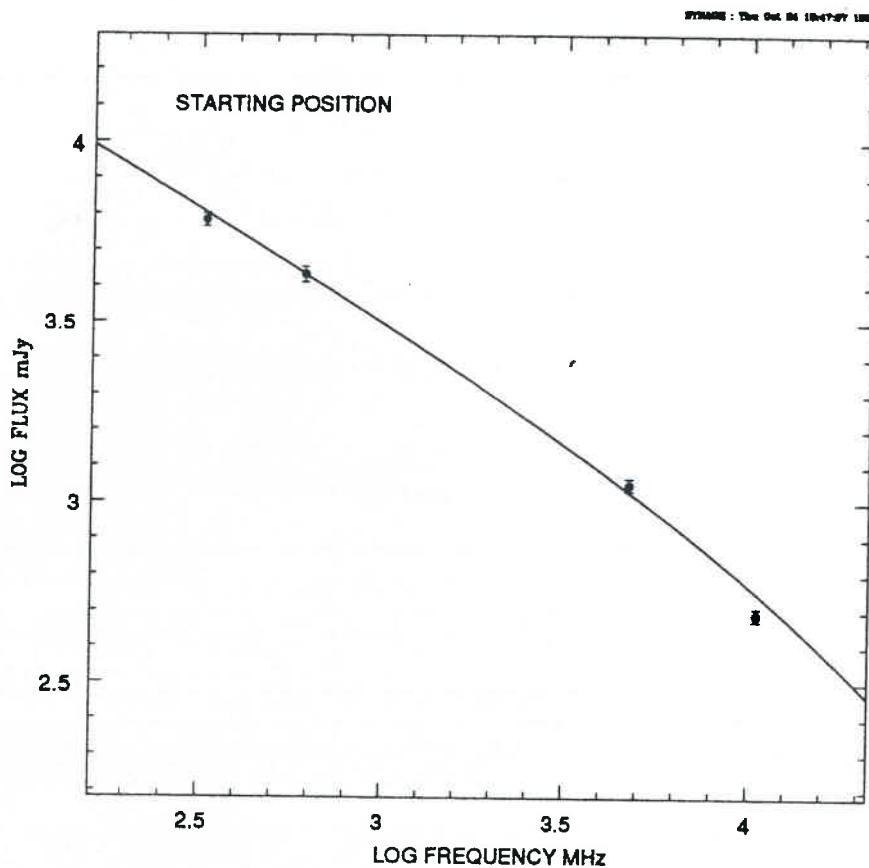
In questo caso per frequenza di break di partenza SYNAGE propone l' ultima frequenza osservata.

Ottenuta una frequenza di break di partenza bisogna determinare anche una normalizzazione iniziale. Lo spettro teorico viene normalizzato al flusso misurato alla seconda frequenza.

A questo punto si presenta il menù:

1 =>Begin fit procedure      2 =>Change model parameters  
3 =>Try a new break freq      4 =>Show starting position  
5 =>Un/Flag frequency        6 =>New point  
==>

L'opzione 4 permette di mostrare subito la posizione di partenza del fit:



Se non si è soddisfatti di questa posizione si può modificare a piacimento la frequenza di break di partenza con l'opzione numero 3, oppure provare un nuovo modello con l'opzione 2.

Con l'opzione 5 si può ritornare alla fase di flag e con la 6 selezionare un nuovo point.

## 2.7 La procedura di fit

Come già detto ripetutamente ogni modello è caratterizzato da tre parametri:  $\alpha_{in}$ ,  $\nu_b$ , e normalizzazione.

Fit procedure

- 1 =>Keep Alfa\_in fixed during the fit
- 2 =>Allow Alfa\_in to vary during the fit

Con l'opzione 1 si ha la possibilità di mantenere  $\alpha_{in}$  fisso durante la procedura di fit, in tal modo la minimizzazione del  $\chi^2$  avviene esclusivamente sul piano  $\nu_b$ -norm.

Consideriamo per prima questa eventualità.

Fit procedure

Parameters of interest: vbreak and norm  
Parameter fixed: Alfa\_in

Number of matrix elements..... 625  
Iteration limit..... 10

- 1 =>Show only final iteration
- 2 =>Show all iterations
- 3 =>Change the number of matrix elements
- 4 =>Set new iteration limit

Il fit procede per iterazioni successive.

Iterazione dopo iterazione, il  $\chi^2$  minimo viene determinato con precisione sempre crescente. L'opzione 1 permette di mostrare l'iterazione finale in cui è stata raggiunta la convergenza.

Con l'opzione 2 vengono mostrati su video i risultati di ogni singola iterazione.

Per determinare il  $\chi^2$  minimo, SYNAGE inizialmente costruisce una matrice attorno alla posizione di partenza. Il  $\chi^2$  in questo punto è denominato "starting CHI<sup>2</sup>".

```
Matrix:
  l_vbr      m_vbr      h_vbr
0.56E+04    0.11E+05    0.17E+05
  l_norm      m_norm      h_norm
0.36E+03    0.73E+03    0.11E+04
```

starting CHI<sup>2</sup> = 0.71391580

Gli estremi della matrice sono "l vbr" e "h vbr", per la frequenza di break, "l norm" e "h norm" per la normalizzazione. Fatto ciò determina, all' interno, di questa matrice il  $\chi^2$  massimo e quello minimo

```
CHI^2_min      % matrix
0.35654003      3
CHI^2_MAX
1168.0314      100
```

contemporaneamente, fornisce in percentuale la distanza di questi due punti dal centro della matrice. "% matrix" 100% significa che tale punto si trova sul bordo della matrice, "3%" significa che dista dal centro della matrice il 3% del suo raggio. Il  $\chi^2$  minimo si trova nell' elemento di matrice che corrisponde a due particolari valori di normalizzazione e  $\nu_b$ :

```
-----
Iteration.... 1
Norm_min..... 727.3
Vbreak_min... 0.1134E+05
Chi^2..... 0.3565
-----
```

SYNAGE assume questo nuovo punto nel piano  $\nu_b$ -norm come nuovo punto di partenza. Il programma riposiziona la matrice e la restringe in proporzione a quanto vicino al suo centro si trovava il  $\chi^2$  minimo nella iterazione precedente. Se il  $\chi^2$  minimo si trovava sul bordo della matrice questa non viene ristretta, ma solo spostata sulla nuova posizione di minimo. Quando  $\chi^2$  minimo e  $\chi^2$  massimo si mantengono sul



100% della matrice per diverse iterazioni significa che essa sta traslando. Una volta che il  $\chi^2$  minimo è stato centrato, sono necessarie poche iterazioni al programma per raggiungere la convergenza. Ad ogni modo, potrebbe accadere che la posizione iniziale non sia molto buona. In tal caso il fit potrebbe durare molte iterazioni. Per evitare lunghe attese si ha la possibilità con l'opzione 4 di introdurre un limite al numero di iterazioni.

SYNAGE ask you if continue or stop every iteration limit

Actual iteration limit: 10

New iteration limit:

Ogni volta che questo limite viene raggiunto il fit può essere sospeso.

WARNING:reached iteration n. 6

1 =>Continue 2 =>Interrupt fit

Infine l'opzione 3 permette di aumentare il numero di elementi della matrice.

Rise number of matrix elements to increase fit accuracy.  
I suggest you to use a high number for matrix elements only in combination with a small value for the limit iteration (say 2 or 3).

Reasonable values for the number of matrix elements must lie within the range 500 - 10000

Actual number of matrix elements: 625

New number of matrix elements:

Aumentare il numero degli elementi della matrice rende il fit più accurato, ma anche più lento. Ration per cui è bene combinare un numero elevato di elementi di matrice con un limite di interazione molto basso. In tal modo, si può interrompere il fit dopo le prime iterazioni nel caso in cui questo risultasse troppo lento.

Consideriamo ora il caso in cui si vogliono determinare con il fit tutti e tre i parametri del modello.

Fit procedure

Parameters of interest: Alfa\_in, vbreak and norm

Il fit procede grosso modo nella stessa maniera descritta in precedenza. Questa volta però si ha una dimensione in più. La minimizzazione viene realizzata tramite una matrice tridimensionale nello spazio dei tre parametri. Le singole iterazioni mostrano i valori della terna di parametri che realizza il minimo del  $\chi^2$  all' interno della matrice.

In ogni caso ( $\alpha_{in}$  fisso oppure no) la procedura di fit si conclude mostrando il valore dei parametri del modello in corrispondenza dei quali la funzione  $\chi^2$  presenta il minimo assoluto.

---

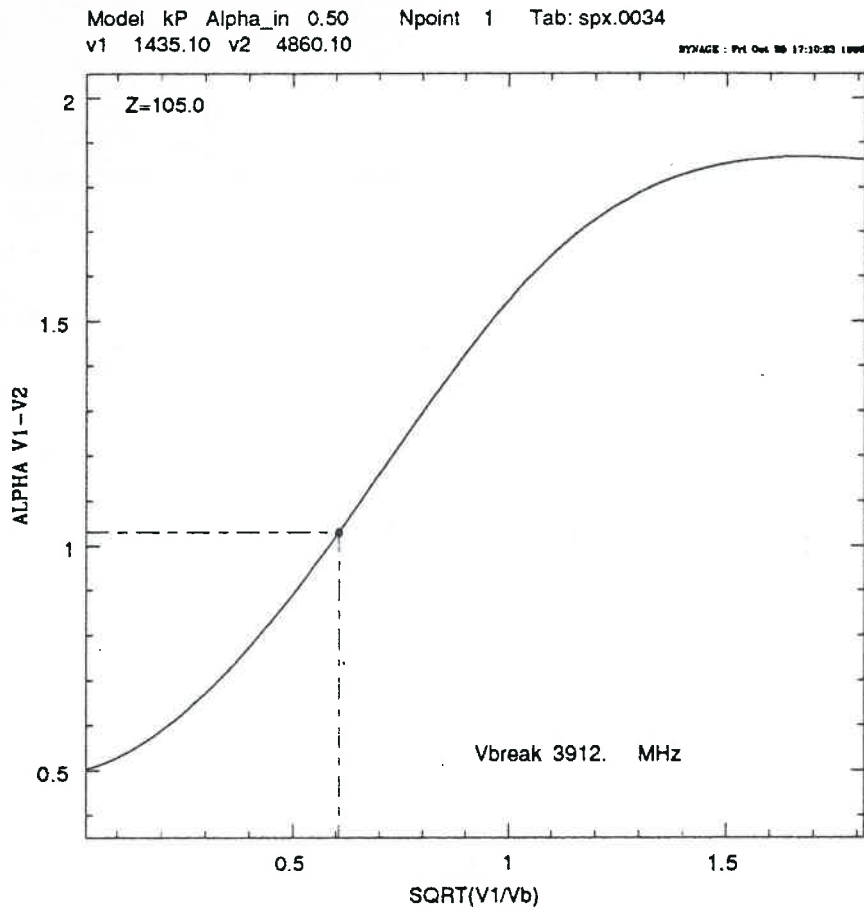
Iteration.....	3
Alfa_in.....	0.472
Vbreak.....	0.1455E+05 MHz
Norm.....	621.4
Chi^2(reduced)...	0.5193

---

Con "CHI2 (red.)" si intende il  $\chi^2$  ridotto, diviso cioè per il numero di gradi di libertà del fit.

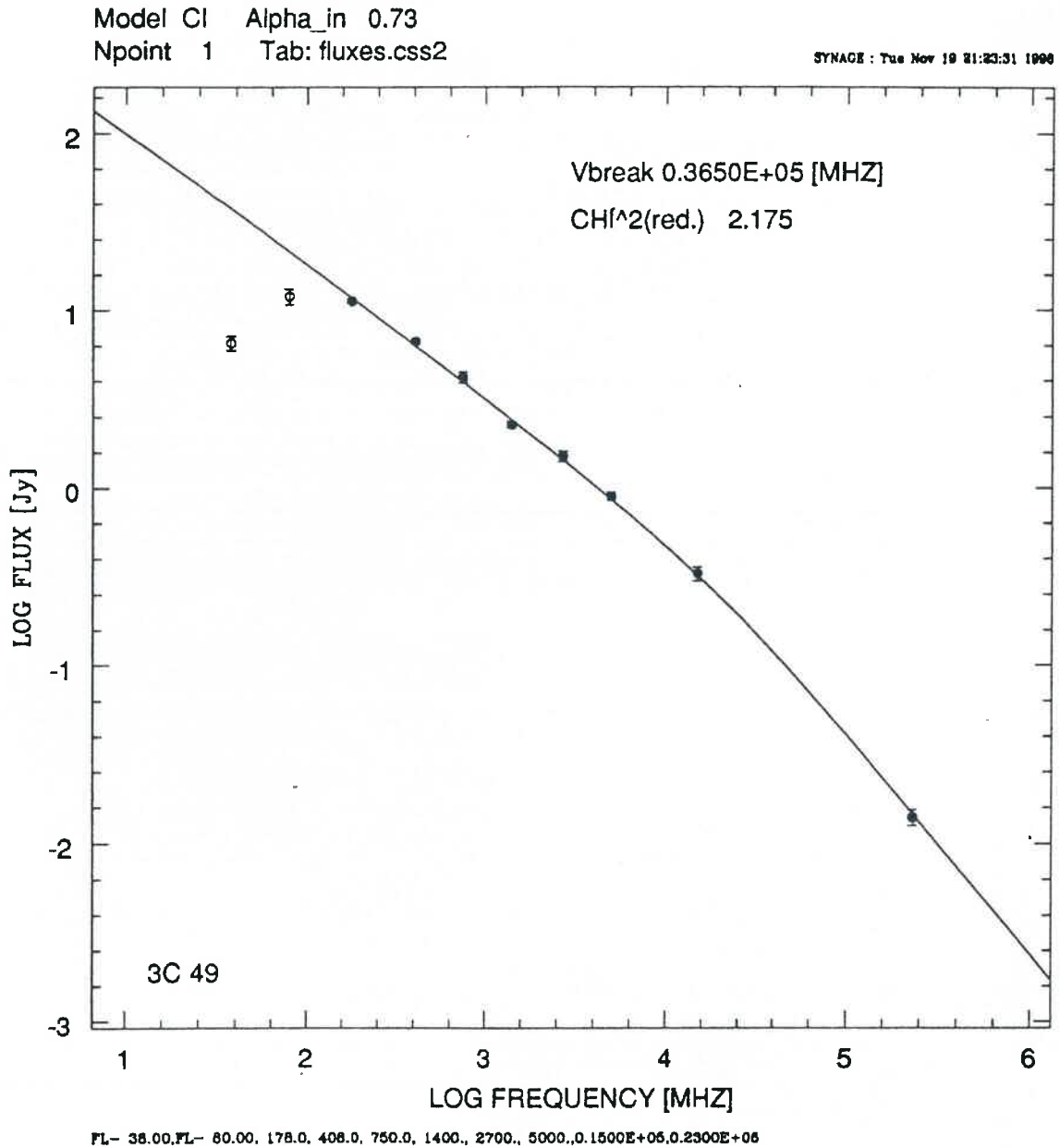
## 2.8 Output grafico

Una volta determinata la frequenza di break, SYNAGE apre la finestra grafica. Nel caso di due frequenze viene mostrato un grafico dell' andamento dell' indice spettrale contro il parametro  $(\nu_1/\nu_b)^{1/2}$ .



v1,v2, e Vbreak sono rispettivamente la coppia di frequenze e la frequenza di break. Le linee tratteggiate indicano la posizione dell' indice spettrale osservato e della frequenza di break.

Nel caso di più frequenze viene mostrato il risultato della procedura di fit.



I pallini vuoti rappresentano le frequenze eliminate dal fit. Nel caso del grafico in esame tali frequenze non sono state incluse a causa dell' attenuazione del flusso causata dall' autoassorbimento di sincrotrone. Di tutti i grafici è poi possibile ottenere una stampa o un file Postscript:

```
1 =>Continue
2 =>Print
3 =>Postscript file
4 =>Data file
```

L' opzione 4 ("Data file") permette di salvare in un file dati il valori numerici dello spettro mostrato in figura. In questo modo l' utente può elaborare a suo piacimento la grafica fuori dall' ambito del programma.

## 2.9 La tabella di output

È possibile infine salvare il risultato del fit nella tabella di output

Model	Alpha_in	Delta	
kP	0.472	1.944	
Npoint	Nfreq	Vbreak	Chi^2 (red.)
1	4	0.1455E+05	0.519303

```
1 =>Save results on table: ris.
2 =>Change parameters whitout save this result
3 =>Confidence contours
4 =>New point
5 =>End program
```

Ogni cambiamento del modello viene sempre segnalato da una linea tratteggiata

Data Table ngc1265

Model	Alpha_in	Delta	
kP	0.500	2.000	
Npoint	Nfreq	Vbreak	Chi^2 (red.)
1	4	0.1455E+05	0.519303
2	4	9344.	0.794915E-01

Model	Alpha_in	Delta	
JP	0.500	2.000	
Npoint	Nfreq	Vbreak	Chi^2 (red.)
1	4	0.3395E+05	0.266263

## 2.10 Intervalli di confidenza

Se il numero di gradi di libertà del fit lo consente, si possono avere gli intervalli di confidenza su parametri che realizzano il  $\chi^2$  minimo.

Calculating confidence levels

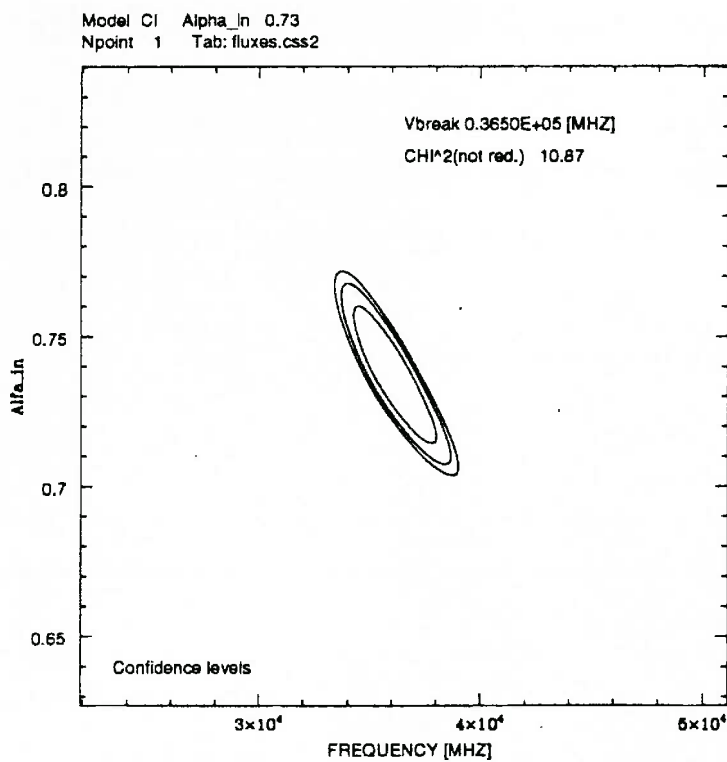
Parameters of interest:Alfa\_in, Norm and Vbreak

CHI<sup>2</sup> min (not red.)= 31.597

contour 1 CHI<sup>2</sup> + 3.530  
contour 2 CHI<sup>2</sup> + 6.250  
contour 3 CHI<sup>2</sup> + 8.020

1 =>Continue  
2 =>Change contours  
3 =>Restore default contours

Il numero ed il valore dei contorni che delimitano le regioni di confidenza può essere modificato a piacimento dall' utente.



La regione mostrata può essere espansa o ridotta:

Region shown:

l_vbr	m_vbr	h_vbr
0.10E+05	0.20E+05	0.30E+05
l_alfa	m_alfa	h_alfa
0.55	0.70	0.85

- 1 =>Continue
- 2 =>Expand region (OFF zoom)
- 3 =>Reduce region (IN zoom)
- 4 =>Change contours

Nel caso in cui il  $\chi^2$  sia stato minimizzato facendo variare tutti e tre i parametri del modello è possibile avere un' immagine dei tre piani.

- 1 =>Alfa\_in-Vbreak plane
- 2 =>Alfa\_in-norm plane
- 3 =>Vbreak-norm plane
- 4 =>Continue

Anche del grafico degli intervalli di confidenza si può avere, oltre all' immagine sul video, il file Postscript e la stampa su carta.

# Appendice A

## A.1 Le devices video

Segue l'elenco delle devices video utilizzabili con SYNAGE.

```
nodevice ( null ) : The null device
sgi : Silicon Graphics Iris using the GL
sunwindows : Sunwindows - needs gfxtool
sunview : SunView
upc : An AT&T 3B1
xwindows ( X10 x10 ) : X10R4
x11 ( X11 ) : X11R4
bgi : Borland Graphics Interface
win ( msw ) : Microsoft Windows API
vaxuis ( VAXUIS ) : VAX/VMS UIS driver
tek4010 ( tek4012 TEK4010 TEK4012 ) : tektronix 4010/2
pericom ( gterm GTERM PERICOM ) : Pericom
kermit : kermit v3.0x tektronix emulator
inversekermit : kermit v 3.0x tektronix emulator with inverse video graphics
noswitch : kermit without switching away from graphics screen
kermit2.3 : kermit v2.3 tektronix emulator
televideo ( televideo912 TELEVIDEO TELEVIDEO912 912cy ) : Televideo 912
ansigraph ( atari ANSIGRAPH ATARI ) : AnsiGraf tektronics emulator on Atari ST
falco ( FALCO ) : falco 5220e
graphon ( GRAPHON ) : graphon GO-250 (with erase)
sqgrap ( SQGRAP ) : graphon set up to be square
selanar ( hirez SELANAR HIREZ ) : selanar hirez 100xl
decpro ( DECPRO ) : DecPro in tek mode (use termtyp dumb)
em4010 ( EM4010 ) : PC 4010 emulator
em4010d ( EM4010D ) : PC 4010 emulator with 1s delay on entry to graphics
esprit ( ESPRIT ) : Executive 10/102
xterm ( XTERM ) : Xterm tektronix emulator
macvt ( versaterm MACVT VERSATERM ) : Macintosh VersaTerm Tek4014
vt640 ( vt640g VT640 VT640G ) : vt100 with Retrographics
tek4014 ( TEK4014 ) : tektronix 4014
vt240 ( vt125 VT240 VT125 ) : vt240 or vt125 in ReGIS mode (use termtyp dumb)
hard4010 ( hard4012 HARD4010 HARD4012 ) : a real tektronix 4010/2
```



## A.2 Le regole di installazione

Il file eseguibile di SYNAGE è funzionante solo in DIGITAL UNIX ALPHA.  
I files sorgenti sono in FORTRAN77 e utilizzano le routines grafiche SM.  
Vanno così compilati assieme alle librerie:

*-L/usr/local/lib -lplotsub -ldevices -lutils -lX11*

I principali problemi di *porting* su macchine diverse dalle DIGITAL ALPHA sono probabilmente costituiti dalle chiamate alle funzioni di sistema *system* ed al formato di input dei dati ossia *format(A, \$)*.

Per poter funzionare SYNAGE ha assoluto bisogno di 15 files di dati. Questi files contengono gli spettri numerici calcolati per i modelli KP, JP, e CI. Tali spettri devono sempre trovarsi nella directory

*/usr/local/lib/synage*

A meno che non si decida di modificare la subroutine *norspe.f* che contiene le istruzioni di lettura di questi files.

### A.3 Le soluzioni numeriche

Seguono le tabulazioni delle soluzioni numeriche per i modelli KP.

MODELLI KP Log v/vb	Log J(v/vb)				
	1.75	2.00	2.25	2.50	3.00 <=delta
-4.000	1.747	2.175	2.620	3.079	4.027
-3.800	1.673	2.075	2.494	2.928	3.826
-3.600	1.598	1.975	2.369	2.777	3.624
-3.400	1.524	1.875	2.243	2.626	3.422
-3.200	1.450	1.774	2.117	2.474	3.220
-3.000	1.376	1.674	1.991	2.322	3.017
-2.800	1.302	1.573	1.864	2.169	2.813
-2.600	1.228	1.472	1.737	2.016	2.608
-2.400	1.155	1.371	1.609	1.861	2.401
-2.200	1.081	1.270	1.480	1.706	2.193
-2.000	1.007	1.167	1.349	1.548	1.983
-1.914	0.975	1.122	1.293	1.480	1.891
-1.829	0.943	1.078	1.236	1.412	1.800
-1.743	0.911	1.033	1.179	1.343	1.708
-1.657	0.878	0.988	1.122	1.273	1.614
-1.571	0.845	0.942	1.063	1.203	1.520
-1.486	0.812	0.896	1.005	1.132	1.425
-1.400	0.779	0.849	0.945	1.060	1.329
-1.314	0.745	0.801	0.884	0.987	1.232
-1.229	0.710	0.753	0.823	0.913	1.133
-1.143	0.674	0.703	0.760	0.837	1.033
-1.057	0.638	0.653	0.697	0.760	0.931
-0.971	0.600	0.601	0.631	0.682	0.827
-0.886	0.561	0.547	0.564	0.601	0.720
-0.800	0.521	0.492	0.494	0.518	0.611
-0.714	0.478	0.434	0.423	0.433	0.499
-0.629	0.433	0.374	0.348	0.344	0.384
-0.543	0.385	0.311	0.270	0.252	0.264
-0.457	0.334	0.244	0.189	0.156	0.140
-0.371	0.279	0.173	0.103	0.056	0.011
-0.286	0.219	0.098	0.012	-0.050	-0.123
-0.200	0.154	0.016	-0.085	-0.162	-0.265
-0.114	0.082	-0.072	-0.189	-0.281	-0.413
-0.029	0.003	-0.167	-0.300	-0.408	-0.570
0.057	-0.084	-0.271	-0.420	-0.543	-0.736
0.143	-0.181	-0.384	-0.550	-0.688	-0.912
0.229	-0.288	-0.508	-0.689	-0.844	-1.098
0.314	-0.406	-0.641	-0.839	-1.009	-1.294
0.400	-0.534	-0.785	-0.998	-1.184	-1.499
0.486	-0.671	-0.938	-1.167	-1.367	-1.713
0.571	-0.816	-1.098	-1.341	-1.557	-1.932
0.657	-0.966	-1.262	-1.519	-1.749	-2.153
0.743	-1.116	-1.426	-1.697	-1.941	-2.372
0.829	-1.264	-1.587	-1.872	-2.130	-2.589
0.914	-1.407	-1.744	-2.043	-2.315	-2.802
1.000	-1.548	-1.899	-2.212	-2.497	-3.013
1.200	-1.867	-2.251	-2.596	-2.914	-3.495
1.400	-2.179	-2.596	-2.974	-3.326	-3.973
1.600	-2.487	-2.937	-3.348	-3.733	-4.447
1.800	-2.792	-3.275	-3.720	-4.138	-4.919
2.000	-3.096	-3.612	-4.091	-4.542	-5.389

## Soluzioni numeriche per i modelli JP.

### MODELLI JP

Log v/vb	Log J(v/vb)				
	1.75	2.00	2.25	2.50	3.00 $\leq \delta$
-4.000	1.746	2.174	2.619	3.077	4.025
-3.800	1.672	2.074	2.493	2.926	3.824
-3.600	1.597	1.974	2.367	2.775	3.622
-3.400	1.523	1.873	2.241	2.623	3.419
-3.200	1.450	1.773	2.115	2.471	3.216
-3.000	1.376	1.672	1.988	2.318	3.012
-2.800	1.302	1.571	1.861	2.165	2.807
-2.600	1.228	1.470	1.732	2.010	2.600
-2.400	1.155	1.368	1.603	1.854	2.392
-2.200	1.082	1.266	1.473	1.697	2.181
-2.000	1.007	1.162	1.341	1.537	1.967
-1.914	0.975	1.117	1.283	1.467	1.874
-1.829	0.942	1.071	1.225	1.397	1.781
-1.743	0.909	1.025	1.166	1.326	1.686
-1.657	0.876	0.978	1.107	1.255	1.591
-1.571	0.842	0.930	1.047	1.182	1.494
-1.486	0.808	0.882	0.985	1.108	1.396
-1.400	0.772	0.833	0.923	1.033	1.296
-1.314	0.736	0.783	0.860	0.957	1.194
-1.229	0.699	0.731	0.794	0.879	1.091
-1.143	0.660	0.678	0.728	0.798	0.986
-1.057	0.619	0.623	0.659	0.716	0.877
-0.971	0.577	0.566	0.587	0.631	0.766
-0.886	0.532	0.506	0.513	0.543	0.652
-0.800	0.484	0.443	0.436	0.452	0.533
-0.714	0.434	0.377	0.355	0.356	0.411
-0.629	0.379	0.306	0.269	0.256	0.282
-0.543	0.319	0.230	0.178	0.151	0.148
-0.457	0.254	0.149	0.081	0.039	0.007
-0.371	0.181	0.060	-0.024	-0.082	-0.142
-0.286	0.101	-0.037	-0.137	-0.210	-0.301
-0.200	0.010	-0.145	-0.261	-0.350	-0.472
-0.114	-0.092	-0.264	-0.397	-0.503	-0.655
-0.029	-0.209	-0.399	-0.548	-0.670	-0.855
0.057	-0.342	-0.550	-0.717	-0.856	-1.073
0.143	-0.497	-0.723	-0.907	-1.063	-1.313
0.229	-0.676	-0.920	-1.123	-1.296	-1.580
0.314	-0.885	-1.148	-1.369	-1.559	-1.878
0.400	-1.131	-1.412	-1.651	-1.860	-2.214
0.486	-1.420	-1.721	-1.979	-2.206	-2.596
0.571	-1.763	-2.083	-2.360	-2.606	-3.032
0.657	-2.170	-2.510	-2.805	-3.070	-3.534
0.743	-2.655	-3.014	-3.330	-3.614	-4.114
0.829	-3.235	-3.613	-3.948	-4.251	-4.788
0.914	-3.926	-4.324	-4.677	-4.999	-5.573
1.000	-4.740	-5.160	-5.535	-5.879	-6.497
1.200	-7.419	-7.887	-8.310	-8.701	-9.412
1.400	-11.588	-12.103	-12.574	-13.013	-13.819
1.600	-18.110	-18.675	-19.196	-19.683	-20.588
1.800	-28.370	-28.984	-29.558	-30.091	-31.092
2.000	-44.401	-45.053	-45.670	-46.246	-47.341

Soluzioni numeriche per i modelli CI.

MODELLI CI

Log v/vb	Log J(v/vb)				
	1.75	2.00	2.25	2.50	3.00 <=delta
-4.000	1.508	2.064	2.611	3.152	4.233
-3.800	1.433	1.964	2.486	3.002	4.033
-3.600	1.359	1.864	2.360	2.851	3.832
-3.400	1.284	1.764	2.234	2.701	3.631
-3.200	1.210	1.664	2.107	2.550	3.430
-3.000	1.135	1.564	1.981	2.399	3.228
-2.800	1.061	1.464	1.855	2.248	3.026
-2.600	0.987	1.364	1.729	2.096	2.823
-2.400	0.913	1.264	1.603	1.944	2.620
-2.200	0.839	1.163	1.477	1.791	2.416
-2.000	0.765	1.062	1.350	1.638	2.211
-1.914	0.734	1.018	1.295	1.571	2.122
-1.829	0.702	0.975	1.240	1.505	2.034
-1.743	0.670	0.931	1.185	1.438	1.944
-1.657	0.638	0.887	1.130	1.372	1.855
-1.571	0.606	0.843	1.075	1.304	1.765
-1.486	0.574	0.799	1.019	1.237	1.675
-1.400	0.542	0.754	0.962	1.169	1.584
-1.314	0.509	0.709	0.906	1.101	1.493
-1.229	0.477	0.664	0.849	1.032	1.401
-1.143	0.444	0.618	0.791	0.962	1.309
-1.057	0.411	0.573	0.733	0.892	1.215
-0.971	0.377	0.526	0.674	0.821	1.121
-0.886	0.343	0.479	0.615	0.750	1.026
-0.800	0.308	0.431	0.554	0.677	0.930
-0.714	0.273	0.383	0.493	0.604	0.832
-0.629	0.236	0.333	0.431	0.529	0.734
-0.543	0.199	0.282	0.367	0.453	0.633
-0.457	0.161	0.230	0.302	0.376	0.532
-0.371	0.121	0.177	0.236	0.297	0.429
-0.286	0.079	0.122	0.168	0.216	0.324
-0.200	0.036	0.065	0.097	0.133	0.216
-0.114	-0.010	0.006	0.025	0.049	0.107
-0.029	-0.058	-0.056	-0.049	-0.038	-0.004
0.057	-0.108	-0.119	-0.126	-0.128	-0.118
0.143	-0.161	-0.186	-0.205	-0.219	-0.234
0.229	-0.217	-0.255	-0.287	-0.314	-0.351
0.314	-0.276	-0.327	-0.371	-0.410	-0.472
0.400	-0.338	-0.402	-0.458	-0.509	-0.594
0.486	-0.403	-0.479	-0.547	-0.609	-0.717
0.571	-0.470	-0.558	-0.638	-0.712	-0.842
0.657	-0.539	-0.639	-0.730	-0.815	-0.968
0.743	-0.610	-0.721	-0.824	-0.920	-1.095
0.829	-0.682	-0.804	-0.918	-1.025	-1.222
0.914	-0.755	-0.888	-1.013	-1.131	-1.350
1.000	-0.828	-0.972	-1.108	-1.238	-1.478
1.200	-1.001	-1.170	-1.332	-1.486	-1.777
1.400	-1.174	-1.369	-1.556	-1.736	-2.077
1.600	-1.349	-1.569	-1.781	-1.985	-2.376
1.800	-1.523	-1.769	-2.006	-2.235	-2.676
2.000	-1.698	-1.968	-2.230	-2.485	-2.976